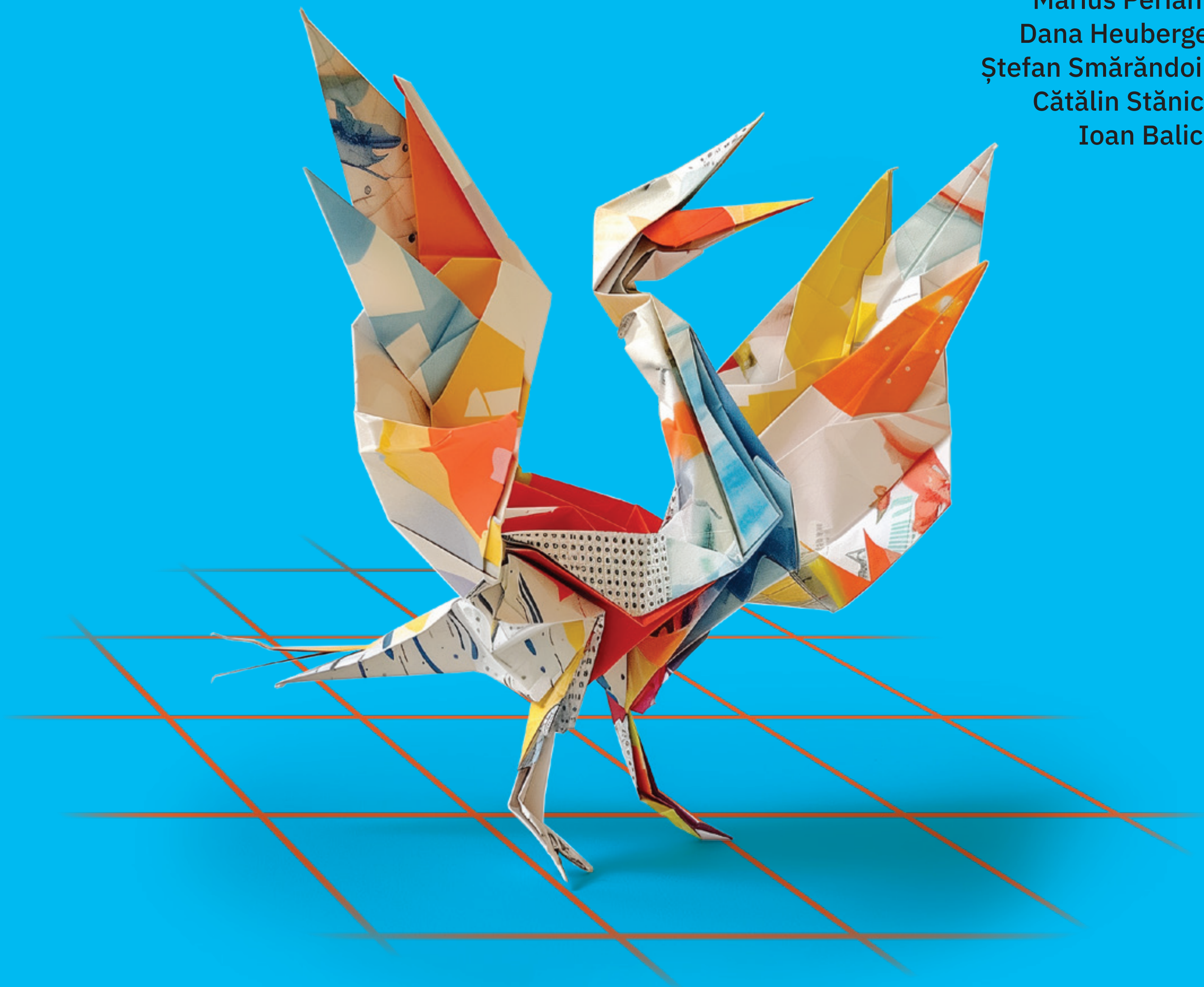
Ministerul Educației

Marius Perianu
Dana Heuberger
Ștefan Smărăndoiu
Cătălin Stănică
Ioan Balica



Matematică

Clasa a VII-a

7

Acest manual este proprietatea Ministerului Educației.

Acest manual școlar este realizat în conformitate cu Programa școlară aprobată
prin Ordinul ministrului educației naționale nr. 3393/28.02.2017.

119 – număr unic de telefon la nivel național pentru cazurile de abuz împotriva copiilor

116.111 – numărul de telefon de asistență pentru copii

Ministerul Educației

Marius Perianu
Dana Heuberger
Ștefan Smărăndoiu
Cătălin Stănică
Ioan Balica

Matematică

Clasa a VII-a

7

Manualul școlar a fost aprobat de Ministerul Educației prin ordinul de ministru nr. 5420 / 04.07.2024.

Manualul este distribuit elevilor în mod gratuit, atât în format tipărit, cât și în format digital, și este transmisibil timp de patru ani școlari, începând din anul școlar 2024-2025.

Inspectoratul Școlar . . . .

Școala / Colegiul / Liceul . . . .

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT DE:

Anul	Numele elevului	Clasa	Anul școlar	Aspectul manualului*			
				format tipărit		format digital	
				la primire	la predare	la primire	la predare
1							
2							
3							
4							

* Pentru precizarea aspectului manualului se va folosi unul dintre următorii termeni: ***nou***, ***bun***, ***îngrijit***, ***neîngrijit***, ***deteriorat***.

- Cadrele didactice vor verifica dacă informațiile înscrise în tabelul de mai sus sunt corecte.
- Elevii nu vor face niciun fel de însemnări pe manual.

Referenți științifici:
- conf. univ. dr. Eugen Păltănea, Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea „Transilvania” din Brașov
- prof. gradul I Vladimir Cerbu, Colegiul Național Militar „Ștefan cel Mare” din Câmpulung Moldovenesc

Coordonator redacție: Cătălin Georgescu
Editor-coordonator: Mihaela Preda
Redactare: Irina Munteanu
Copertă: Faber Studio
Tehnoredactare: Crenguța Rontea
Activități digitale interactive și platformă e-learning: Learn Forward Ltd. Website: https://learnfwd.com
Înregistrare sunet și postprocesare: ML Sistem Consulting
Voce: Camelia Pintilie
Animații: S.C. Film Experience S.R.L.
Credite foto și video: Dreamstime

ISBN 978-606-076-829-6

Pentru comenzi puteți contacta Departamentul Difuzare
C.P. 12, O.P. 63, sector 1, București
Telefoane: 021 796 73 83; 021 796 73 80
Fax: 021 369 31 99
www.art-educational.ro

Cuvânt-înainte

Matematica este arta de a construi realitatea și de a oferi înțelesuri noi cunoașterii umane. Urmând definiția artei, matematica presupune exersare și îndemânare, cunoaștere și simț estetic și, mai ales, imaginație și intuiție. Matematica este poezia ideilor logice, iar adevărurile matematice sunt gamele muzicale în care este scrisă simfonia legilor naturii.

Matematica clasei a VII-a este povestea marilor descoperiri: începem călătoria măsurând realitatea cu mărimi și forme noi (Unitatea 1: Mulțimea numerelor reale), apoi transpunem problemele practice în modele matematice (Unitatea 2: Ecuații și sisteme de ecuații liniare) și stabilim coordonate matematice pentru lumea înconjurătoare sau pentru activitățile cotidiene (Unitatea 3: Elemente de organizare a datelor). Realitatea se descrie în forme noi, drepte (Unitatea 4: Patrulatere) sau rotunde (Unitatea 5: Cercul), și se modelează în dimensiuni mai mari sau mai mici (Unitatea 5: Asemănarea triunghiurilor). Cum orice final amintește de început, ultima aventură aduce împreună numerele și formele geometrice (Unitatea 7: Relații metrice).

Pentru ca aventura noastră matematică să fie încununată de succes, manualul ne poartă printre idei, concepte, definiții și teoreme folosind o exprimare prietenoasă, apropiată de elev, apelând la simțul practic și la intuiție. Introducerea conceptelor matematice se face plecând de la exemple din realitatea imediată, de la experiențele de zi cu zi. Matematica apare astfel ca o lume deschisă, vie, dinamică, în strânsă legătură cu toate domeniile de activitate, capabilă să formuleze, să descrie și să explice situații, probleme, fenomene sau procese.

Deși nu apare la cuprins, adevărata lecție din acest manual este aceea care ne învață să ne punem întrebarea: „De ce?“. Educația matematică este nu doar o simplă activitate de învățare, ci reprezintă *antrenarea minții pentru a gândi*. Manualul oferă, la fiecare pas, momente de investigație, de reflecție, ocazii de a pune întrebări și de a corela răspunsurile posibile cu datele situațiilor analizate.

Matematica este cea mai frumoasă și mai profundă creație a spiritului uman. Umanitatea are nevoie de matematică, pentru că tot ceea ce există în Univers nu este doar descris de matematică, ci este construit din matematică.

Acest manual este ghidul de călătorie în universul minunat al matematicii.

Autorii

Manualul cuprinde:
varianta tipărită

+

varianta digitală, similară cu cea tipărită, care are în plus activități multimedia interactive de învățare, cu rolul de a spori valoarea cognitivă.
Varianta digitală este accesibilă pe platforma www.manuale.edu.ro.

Instrucțiuni de utilizare a manualului digital

Varianta digitală a manualului este similară cu cea tipărită, având în plus 155 de AMII, activități multimedia interactive de învățare, cu rolul de a spori valoarea cognitivă. Activitățile multimedia interactive de învățare sunt de trei feluri, simbolizate pe parcursul manualului astfel:

- **Activitate statică**, de ascultare activă și de observare dirijată a unei imagini semnificative
- **Activitate animată**, filmuleț sau scurtă animație
- **Activitate interactivă**, de tip exercițiu sau joc, în urma căreia elevul are feedback imediat

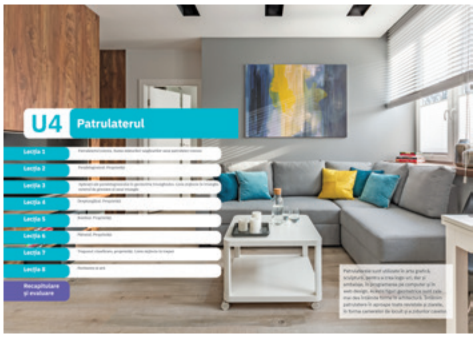
Prezentarea manualului

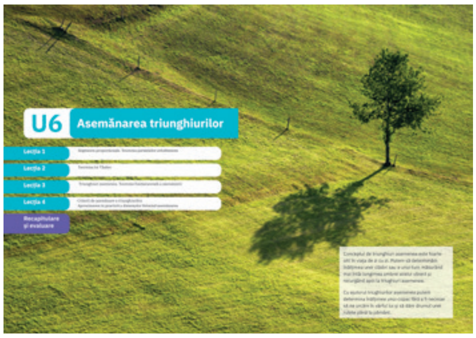
Manualul este împărțit în șapte unități care acoperă integral conținutul prevăzut de programa școlară. Lecțiile care compun o unitate sunt prezentate în mod coerent, unitar, într-un stil consecvent.

Fiecare lecție debutează cu o problemă practică, pe baza căreia se introduc noile concepte. Acestea sunt conturate apoi într-un limbaj matematic care echilibrează nivelul descriptiv cu rigoarea specifică matematicii. Noțiunile noi sunt însoțite de exemple semnificative, comentarii și aplicații.

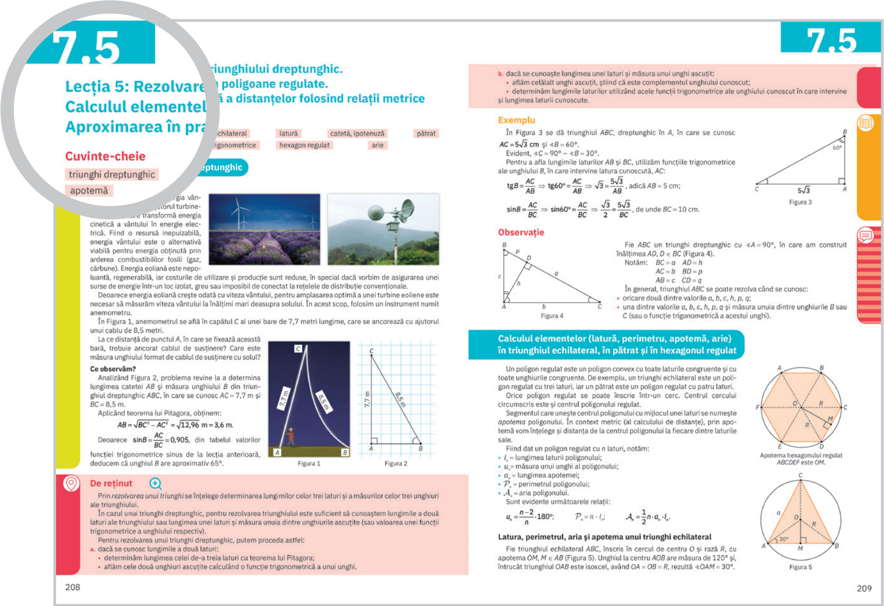
Manualul acordă o atenție sporită gândirii critice și dezvoltării calculului mintal, prin zone dedicate, încurajând în același timp activitățile de grup, independența în gândire și dezvoltarea încrederii în sine. Evaluarea se realizează prin forme și instrumente diversificate, orientate spre formarea și dezvoltarea competențelor matematice.

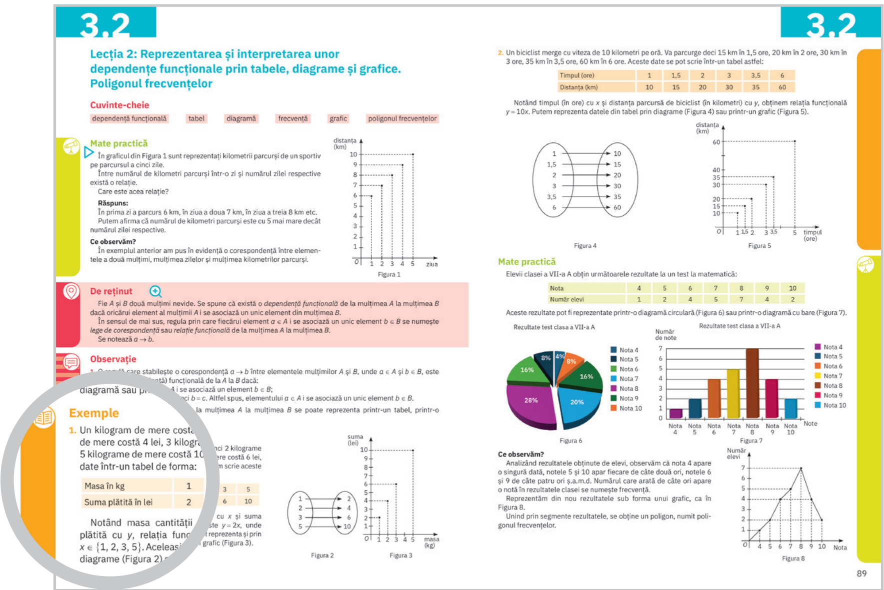
Manualul este structurat în 7 unități de învățare

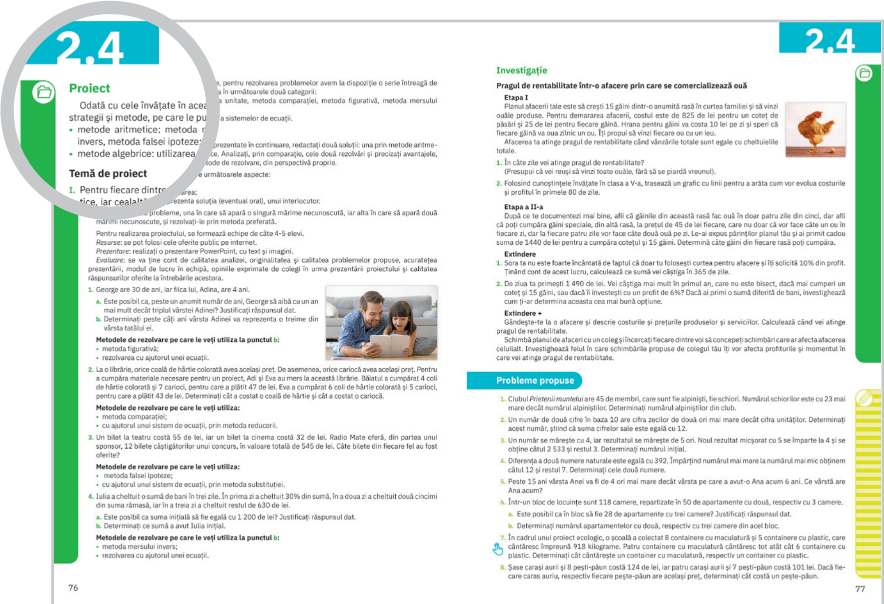


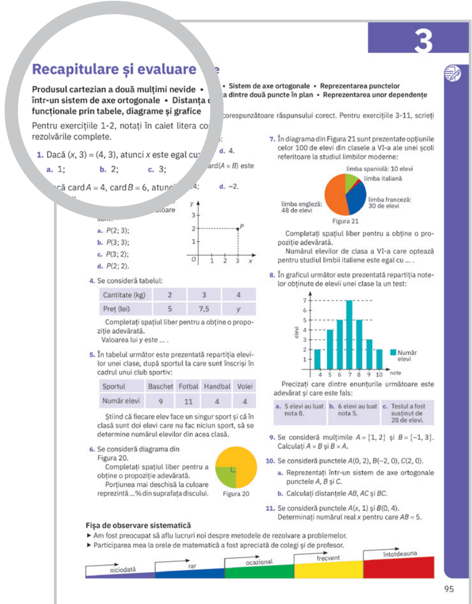


Structura unității de învățare









Alte butoane folosite în varianta digitală:

- Cuprins
- Ecran complet
- Mod de afișare 2 pagini (tip carte)
- Mod de afișare pagină lată (pagină sub pagină)
- Mod de afișare digital responsive
- Mod de afișare comutare automată
- Notițe
- Ajutor
- Navigare către pagina precedentă
- Navigare către pagina următoare

Cuprins

Competențe generale și specifice

Competențe generale

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar
2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale
3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice
4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată
5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date
6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

Competențe specifice

1.1. Identificarea numerelor aparținând diferitelor submulțimi ale lui $\mathbb{R}$
1.2. Identificarea unei situații date rezolvabile prin ecuații sau sisteme de ecuații liniare
1.3. Identificarea unor informații din tabele, grafice și diagrame
1.4. Identificarea patrulaterelor particulare în configurații geometrice date
1.5. Identificarea elementelor cercului și/sau poligoanelor regulate în configurații geometrice date
1.6. Identificarea triunghiurilor asemenea în configurații geometrice date
1.7. Recunoașterea elementelor unui triunghi dreptunghic într-o configurație geometrică dată
2.1. Aplicarea regulilor de calcul pentru estimarea și aproximarea numerelor reale
2.2. Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluțiilor unor ecuații sau sisteme de ecuații liniare
2.3. Prelucrarea unor date sub formă de tabele, grafice sau diagrame în vederea înregistrării, reprezentării și prezentării acestora
2.4. Descrierea patrulaterelor utilizând definiții și proprietăți ale acestora, în configurații geometrice date
2.5. Descrierea proprietăților cercului și ale poligoanelor regulate înscrise într-un cerc
2.6. Stabilirea relației de asemănare între triunghiuri
2.7. Aplicarea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic pentru determinarea unor elemente ale acestuia
3.1. Utilizarea unor algoritmi și a proprietăților operațiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale
3.2. Utilizarea transformărilor echivalente în rezolvarea unor ecuații și sisteme de ecuații liniare
3.3. Alegerea metodei adecvate de reprezentare a problemelor în care intervin dependențe funcționale și reprezentări ale acestora
3.4. Utilizarea proprietăților patrulaterelor în rezolvarea unor probleme
3.5. Utilizarea proprietăților cercului în rezolvarea de probleme
3.6. Utilizarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice date pentru determinarea de lungimi, măsuri și arii
3.7. Deducerea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic
4.1. Folosirea terminologiei aferente noțiunii de număr real (semn, modul, opus, invers)
4.2. Redactarea rezolvării ecuațiilor și sistemelor de ecuații liniare
4.3. Descrierea în limbajul specific matematicii a unor elemente de organizare a datelor
4.4. Exprimarea în limbaj geometric a noțiunilor legate de patrulatere
4.5. Exprimarea proprietăților cercului și ale poligoanelor în limbaj matematic
4.6. Exprimarea în limbaj matematic a proprietăților unor figuri geometrice folosind asemănarea
4.7. Exprimarea în limbaj matematic a relațiilor dintre elementele unui triunghi dreptunghic
5.1. Elaborarea de strategii pentru rezolvarea unor probleme cu numere reale
5.2. Stabilirea unor metode de rezolvare a ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare
5.3. Analizarea unor situații practice prin elemente de organizare a datelor
5.4. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculării unor lungimi de segmente, a unor măsuri de unghiuri și a unor arii
5.5. Interpretarea unor proprietăți ale cercului și ale poligoanelor regulate folosind reprezentări geometrice
5.6. Interpretarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice
5.7. Interpretarea unor relații metrice între elementele unui triunghi dreptunghic
6.1. Modelarea matematică a unor situații practice care implică operații cu numere reale
6.2. Transpunerea matematică a unor situații date, utilizând ecuații și/sau sisteme de ecuații liniare
6.3. Transpunerea unei situații date într-o reprezentare adecvată (text, formulă, diagramă, grafic)
6.4. Modelarea unor situații date prin reprezentări geometrice cu patrulatere
6.5. Modelarea matematică a unor situații practice în care intervin poligoane regulate sau cercuri
6.6. Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situații date, utilizând asemănarea triunghiurilor
6.7. Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situații date, utilizând relații metrice în triunghiul dreptunghic

U1 Mulțimea numerelor reale

Majoritatea numerelor pe care le utilizăm cotidian sunt numere reale. Printre acestea se află: numărul banilor pe care îi avem în portofel, statisticile pe care le vedem la emisiunile sportive, măsurile din cărțile de bucate. Apelăm la numere reale pentru a indica viteza vântului, cantitățile de precipitații, distanțele, dar și volumul de benzină din rezervor și pulsul cardiac.

1.1

Lecția 1: Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional pozitiv

Cuvinte cheie

pătrat perfect | rădăcină pătrată | radical

Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural

Mate practică

Terenul din imagine are forma unui pătrat, iar aria sa este egală cu 6 400 m^2.

Ce lungime are latura terenului?

Aria unui pătrat este egală cu pătratul lungimii laturii pătratului.

Notând cu l lungimea laturii terenului, exprimată în metri, aria terenului este l^2 metri pătrați.

Așadar, $l^2 = 6\,400$. Cum $80^2 = 6\,400$, obținem $l = 80$ m.

Ce observăm?

În anumite situații practice, este necesar să determinăm un număr natural n cunoscând cât este pătratul său n^2. Această operație se numește *extragerea rădăcinii pătrate* a numărului n^2.

Un număr natural care este pătratul unui alt număr natural se numește pătrat perfect.

De reținut

Fie a un număr natural pătrat perfect. Se numește *rădăcina pătrată* a sa numărul natural n astfel încât $n^2 = a$.

Numărul n se notează $\sqrt{a}$ și se citește *radical din a*. Astfel, se poate scrie:

$$\sqrt{a} = n \text{ dacă și numai dacă } n^2 = a.$$

Exemple

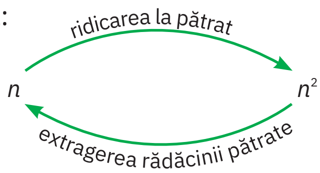
1. $\sqrt{0} = 0$, deoarece $0^2 = 0$;
2. $\sqrt{25} = 5$, deoarece $5^2 = 25$;
3. $\sqrt{121} = 11$, deoarece $11^2 = 121$;
4. $\sqrt{729} = 27$, deoarece $27^2 = 729$;
5. $\sqrt{1024} = 32$, deoarece $32^2 = 1\,024$;
6. $\sqrt{7225} = 85$, deoarece $85^2 = 7\,225$.

Observație

Legătura dintre operația de ridicare la pătrat și operația de extragere a rădăcinii pătrate

Din definiția rădăcinii pătrate a unui număr natural pătrat perfect rezultă imediat că:

1. $\sqrt{n^2} = n$, pentru orice număr natural n;
2. $(\sqrt{a})^2 = a$, pentru orice număr natural pătrat perfect a.



Cu alte cuvinte, operațiile de ridicare la pătrat și de extragere a rădăcinii pătrate sunt operații inverse una celeilalte.

Exemple

1. $\sqrt{7^2} = 7$, deoarece $\sqrt{7^2} = \sqrt{49} = 7$;
2. $(\sqrt{16})^2 = 16$, deoarece $(\sqrt{16})^2 = 4^2 = 16$;
3. $\sqrt{5^2} = 5$, deoarece $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$;
4. $(\sqrt{81})^2 = 81$, deoarece $(\sqrt{81})^2 = 9^2 = 81$.

Rădăcina pătrată a pătratului unui număr rațional pozitiv

În paragraful anterior, am văzut că dacă un număr natural a se poate scrie ca pătratul unui alt număr natural n, atunci a se numește pătrat perfect, iar n se numește rădăcina pătrată (sau radicalul) lui a.

Vom extinde această definiție și pentru pătratele unor numere raționale pozitive.

Activitate pe grupe

1. Lucrând în echipe de câte 2 elevi, copiați și completați tabelul:

x	0,7	1,2	1,3	1,4	1,5	4,5	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{11}{101}$
x^2	0,49					20,25		$\frac{49}{25}$		

2. Transcrieți pe caiete tabelul de mai jos, verificați corectitudinea datelor și determinați, prin încercări, valorile numerelor raționale pozitive x care trebuie scrise în cea de a doua linie a tabelului astfel încât să existe corespondența indicată între x^2 și x:

x^2	0,01	1,69	1,96	2,25	8,41	30,25	$\frac{4}{9}$	$\frac{49}{25}$	$\frac{169}{81}$	$\frac{256}{625}$
x	0,1				2,9		$\frac{2}{3}$			

3. Comparați, între echipe, rezultatele obținute, atât pentru primul, cât și pentru al doilea tabel, și analizați legăturile ce există între datele din cele două tabele.

De reținut

Fie a un număr rațional pozitiv care se poate scrie ca pătratul unui număr rațional.
Numărul rațional pozitiv x cu proprietatea $x^2 = a$ se numește *rădăcina pătrată* a numărului rațional a.

Ca mai înainte, x se notează $\sqrt{a}$ și se citește *radical din a*. Astfel, dacă numărul rațional $a > 0$ este pătratul unui număr rațional, se poate scrie:

$$\sqrt{a} = x \text{ dacă și numai dacă } x^2 = a \text{ și } x > 0.$$

Întrucât $\sqrt{0} = 0$, relația anterioară se scrie mai general, pentru $a \geq 0$, sub forma:

$$\sqrt{a} = x \text{ dacă și numai dacă } x^2 = a \text{ și } x \geq 0.$$

Exemple

1. $\sqrt{0,04} = 0,2$, deoarece $(0,2)^2 = 0,04$;

2. $\sqrt{11,56} = 3,4$, deoarece $3,4^2 = 11,56$;

3. $\sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{3}{7}$, deoarece $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$;

4. $\sqrt{\frac{121}{729}} = \frac{11}{27}$, deoarece $\left(\frac{11}{27}\right)^2 = \frac{121}{729}$.

Observații

1. Dacă numărul rațional $a > 0$ este pătratul unui număr rațional x, atunci $a = x^2 = (-x)^2$.

Exemple: **a.** $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2$; **b.** $5,76 = (2,4)^2 = (-2,4)^2$.

Definiția de mai sus arată că rădăcina pătrată a lui a este un număr pozitiv. Ca urmare:

a. $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ și $\sqrt{\frac{1}{4}} \neq -\frac{1}{2}$; **b.** $\sqrt{5,76} = 2,4$ și $\sqrt{5,76} \neq -2,4$.

2. Legătura dintre operația de ridicare la pătrat și extragerea rădăcinii pătrate se păstrează și în cazul numerelor raționale, cu respectarea condiției de pozitivitate de mai sus. Deoarece modulul unui număr rațional este nenegativ și $|-x| = |x|$, pentru orice număr rațional x, din definiția rădăcinii pătrate rezultă că:

a. $(\sqrt{a})^2 = a$, pentru orice număr rațional $a \geq 0$ care este pătratul unui număr rațional;

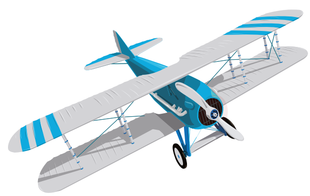
b. $\sqrt{x^2} = |x|$, pentru orice număr rațional x.

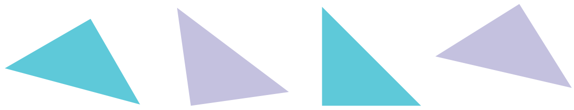
1.1

Rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv

Mate practică

Pentru realizarea unui model de avion precum cel din imaginea alăturată, sunt necesare patru piese identice din placaj, sub forma unor triunghiuri dreptunghice isoscele cu catetele având lungimea de 1 dm.





Piesele se pot obține în două moduri:

1. Desenăm pe foaia de placaj un dreptunghi cu dimensiunile de 1 dm și 2 dm, îl împărțim în două pătrate de latură 1 dm, apoi facem două tăieturi pe diagonalele acestor pătrate, ca în Figura 1, obținând cele patru piese.

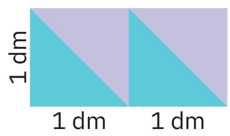


Figura 1

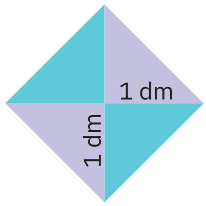


Figura 2

2. Observăm că piesele pot fi aranjate astfel încât să formeze un pătrat (Figura 2). Ne propunem să aflăm lungimea laturii acestui pătrat, pentru ca, decupându-l din altă bucată de placaj, să nu facem risipă de material.

Deoarece patrulaterele din figurile 1 și 2 au aceeași arie, de 2 dm^2, lungimea laturii pătratului este numărul pozitiv x, cu proprietatea că $x^2 = 2$. Cum nu există niciun număr rațional al cărui pătrat să fie egal cu 2, căutăm o aproximare a acestuia.

Deoarece $1^2 < 2 < 2^2$, deducem că x trebuie să fie cuprins între 1 și 2.

De fapt, pentru că $1{,}4^2 = 1{,}96$ și $1{,}5^2 = 2{,}25$, înseamnă că $1{,}4 < x < 1{,}5$. Mai precis, $1{,}41 < x < 1{,}42$, întrucât $1{,}41^2 = 1{,}9881 < 2$ și $1{,}42^2 = 2{,}0164 < 2$.

Ce observăm?

Situația practică descrisă mai sus demonstrează că există un număr pozitiv x, cu proprietatea $x^2 = 2$, a cărui valoare, chiar dacă nu poate fi indicată cu exactitate, poate fi aproximată la un număr întreg sau la o fracție zecimală finită cu una, două sau mai multe zecimale.

Asemănător, putem arăta că, pentru orice număr rațional pozitiv a, există un număr pozitiv x al cărui pătrat este a. Mai mult, se poate demonstra că x este unicul număr cu această proprietate.

Astfel, noțiunea de rădăcină pătrată se extinde la numere raționale pozitive oarecare.

De reținut

Rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv a este un număr pozitiv x, cu proprietatea $x^2 = a$.

Ca mai înainte, notăm $x = \sqrt{a}$ și spunem că x este *radicalul* numărului a (sau *radical din* a).

De asemenea, sunt valabile relațiile:

a. $\sqrt{a} = x$ dacă și numai dacă $x^2 = a$;

b. $(\sqrt{a})^2 = a$, pentru orice număr rațional $a \geq 0$;

c. $\sqrt{a^2} = |a|$, pentru orice număr rațional a.

Exemple

În problema practică de mai înainte, lungimea x a laturii pătratului verifică relația $x^2 = 2$, deci, conform definiției, $x = \sqrt{2}$.

În mod asemănător, alte probleme practice conduc la concluzia că există numerele pozitive $\sqrt{3}$, $\sqrt{3{,}14}$ sau $\sqrt{\frac{5}{12}}$.

Estimarea rădăcinii pătrate a unui număr rațional pozitiv

A *estima* o cantitate înseamnă a indica o valoare aproximativă a acesteia, fără a cunoaște toate datele necesare pentru a putea formula un răspuns exact. Pentru a putea utiliza în practică un număr de forma $\sqrt{a}$, unde a este număr rațional pozitiv, vom folosi aproximări ale sale la numere întregi sau la fracții zecimale finite, încadrând numărul rațional a între pătratele a două numere raționale.

Estimarea rădăcinii pătrate a unui număr rațional pozitiv prin încadrarea între pătrate de numere raționale

Să considerăm, de exemplu, numărul rațional 5,61. Încadrăm acest număr între două pătrate perfecte consecutive: $2^2 < 5{,}61 < 3^2$, de unde rezultă că $2 < \sqrt{5{,}61} < 3$.

Prin urmare, aproximarea lui $\sqrt{5{,}61}$ la ordinul unităților este egală cu 2, dacă aproximarea se face prin lipsă, respectiv cu 3, dacă aproximarea se face prin adaos.

Pentru a determina aproximările lui $\sqrt{5{,}61}$ la ordinul zecimilor și al sutimilor, vom proceda astfel:

Pasul 1: Calculăm pătratele numerelor de forma $\overline{2{,}a}$, unde $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.
Obținem $2{,}3^2 < 5{,}61 < 2{,}4^2$, deci $\sqrt{5{,}61} \simeq 2{,}3\ldots$.

Pasul 2: Calculăm pătratele numerelor de forma $\overline{2{,}3a}$, unde $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.
Obținem $2{,}36^2 < 5{,}61 < 2{,}37^2$, de unde rezultă $\sqrt{5{,}61} \simeq 2{,}36\ldots$.

Continuând în acest fel se pot obține aproximări cu oricâte zecimale.

Utilizarea minicalculatorului pentru aflarea valorii aproximative a rădăcinii pătrate

Folosind minicalculatorul (sau aplicații mobile sau tablete), rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv se află introducând în calculator numărul respectiv, în formă zecimală, și apăsând apoi tasta pe care este marcat semnul *radical*.

De exemplu, valoarea aproximativă a lui $\sqrt{2}$ se află apăsând, în ordine, tastele:

$\boxed{2} \longrightarrow \boxed{\sqrt{}} \longrightarrow \boxed{1{,}4142135}$

Dacă numărul rațional este dat sub forma unei fracții ordinare, atunci folosim tasta de împărțire pentru a aduce numărul la forma zecimală, apoi apăsăm tasta radical.

Portofoliu

Consultați manualul digital pentru a studia:

- metoda babiloniană pentru determinarea valorii aproximative a rădăcinii pătrate a unui număr rațional pozitiv;
- algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional pozitiv exprimat printr-o fracție zecimală finită. Folosind algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate, calculați, cu două zecimale exacte, radicalul dintr-un număr natural care nu este pătrat perfect.

Observație

Tabel cu valorile radicalilor numerelor naturale cuprinse între 1 și 25				
$\sqrt{1}=1$	$\sqrt{6}=2{,}4494\ldots$	$\sqrt{11}=3{,}3166\ldots$	$\sqrt{16}=4$	$\sqrt{21}=4{,}5825\ldots$
$\sqrt{2}=1{,}4142\ldots$	$\sqrt{7}=2{,}6457\ldots$	$\sqrt{12}=3{,}4641\ldots$	$\sqrt{17}=4{,}1231\ldots$	$\sqrt{22}=4{,}6904\ldots$
$\sqrt{3}=1{,}7320\ldots$	$\sqrt{8}=2{,}8284\ldots$	$\sqrt{13}=3{,}6055\ldots$	$\sqrt{18}=4{,}2426\ldots$	$\sqrt{23}=4{,}7958\ldots$
$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{14}=3{,}7416\ldots$	$\sqrt{19}=4{,}3588\ldots$	$\sqrt{24}=4{,}8989\ldots$
$\sqrt{5}=2{,}2360\ldots$	$\sqrt{10}=3{,}1622\ldots$	$\sqrt{15}=3{,}8729\ldots$	$\sqrt{20}=4{,}4721\ldots$	$\sqrt{25}=5$

1.1

Investigație

Pe tablă sunt scrise numerele $a = 7{,}84$ și $b = 1{,}44$. Efectuați următoarele sarcini de lucru și verificați validitatea răspunsurilor voastre prin discuții cu colegii, și apoi cu profesorul. Scrieți în portofoliul personal concluziile corecte.

1. Calculați cu două zecimale exacte următoarele numere, eventual folosind calculatorul de buzunar:

$$\sqrt{a+b},\ \sqrt{a}+\sqrt{b},\ \sqrt{a-b},\ \sqrt{a}-\sqrt{b},\ \sqrt{a\cdot b},\ \sqrt{a}\cdot\sqrt{b},\ \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ și } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

2. Decideți care dintre numerele $\sqrt{a+b}$ și $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ este mai mare. Faceți același lucru pentru $\sqrt{a-b}$ și $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, pentru $\sqrt{a\cdot b}$ și $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, și apoi pentru $\sqrt{\frac{a}{b}}$ și $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

3. Repetați cerințele de la sarcinile de lucru 1 și 2, dacă $a = \frac{225}{256}$ și $b = \frac{4}{25}$.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Arătați că numărul a este pătrat perfect, apoi calculați $\sqrt{a}$:

a. $a = 25\cdot13+25\cdot20-25\cdot17$; b. $a = 12\cdot(1+2+3+...+24)$; c. $a = 14^{60}$; d. $a = 3^{24}\cdot7^{12}$.

Rezolvare:

a. $a = 25\cdot13+25\cdot20-25\cdot17 = 25\cdot(13+20-17) = 25\cdot16 = 5^2\cdot4^2 = (5\cdot4)^2 = 20^2$, deci a este pătrat perfect. Obținem apoi $\sqrt{a} = \sqrt{20^2} = 20$.

b. $a = 12\cdot(1+2+3+...+24) = 12\cdot\frac{24\cdot25}{2} = 12\cdot\frac{24}{2}\cdot25 = 12\cdot12\cdot25 = 12^2\cdot5^2 = (12\cdot5)^2 = 60^2$, deci a este pătrat perfect. Obținem apoi $\sqrt{a} = \sqrt{60^2} = 60$.

c. $a = 14^{60} = 14^{30\cdot2} = (14^{30})^2$, deci a este pătrat perfect. Obținem apoi $\sqrt{a} = \sqrt{(14^{30})^2} = 14^{30}$.

d. $a = 3^{24}\cdot7^{12} = (3^{12})^2\cdot(7^6)^2 = (3^{12}\cdot7^6)^2$, deci a este pătrat perfect. Obținem apoi $\sqrt{a} = \sqrt{(3^{12}\cdot7^6)^2} = 3^{12}\cdot7^6$.

2. Calculați:

a. $\sqrt{16}\cdot\sqrt{9}+\sqrt{100}:\sqrt{25}+\sqrt{25\cdot\sqrt{81}}$; b. $\sqrt{4^2\cdot15+4^2\cdot5^2-4^3}$.

Rezolvare:

a. Calculăm mai întâi radicalii, apoi respectăm ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale:

$\sqrt{16}\cdot\sqrt{9}+\sqrt{100}:\sqrt{25}+\sqrt{25\cdot\sqrt{81}} = 4\cdot3+10:5+\sqrt{25\cdot9} = 12+2+\sqrt{5^2\cdot3^2} = 14+\sqrt{15^2} =$
$= 14+15 = 29$.

b. $\sqrt{4^2\cdot15+4^2\cdot5^2-4^3} = \sqrt{4^2\cdot(15+5^2-4)} = \sqrt{4^2\cdot36} = \sqrt{4^2\cdot6^2} = \sqrt{24^2} = 24$.

Probleme propuse

1. Precizați care dintre numerele următoare este pătrat perfect:

a. 9; b. 24; c. 63; d. 81; e. 196; f. 144; g. 336; h. 400; i 625.

2. Scrieți pătratele perfecte cuprinse între 10 și 150.

3. Copiați în caiet, apoi completați tabelul următor:

x	3	7	9		15		23		
x^2		49		100		400		625	900

4. Stabiliți dacă următoarele egalități sunt adevărate sau false:

a. $\sqrt{4} = 2$; b. $\sqrt{5} = 25$; c. $\sqrt{225} = 15$; d. $\sqrt{100} = 50$; e. $\sqrt{64} = 4$; f. $\sqrt{144} = 12$.

5. Calculați:

a. $\sqrt{25}$; b. $\sqrt{81}$; c. $\sqrt{1}$; d. $\sqrt{400}$; e. $\sqrt{576}$; f. $\sqrt{900}$.

6. Calculați:

a. $\sqrt{4}+\sqrt{36}$; b. $\sqrt{49}-\sqrt{9}$; c. $\sqrt{1}+\sqrt{0}+\sqrt{16}$; d. $\sqrt{100}\cdot\sqrt{9}-\sqrt{25}:5$.

7. Folosind eventual minicalculatorul, calculați:

a. $\sqrt{441}+\sqrt{961}$; **b.** $\sqrt{4096}-\sqrt{1225}$; **c.** $\sqrt{2209}+2\cdot\sqrt{1369}$; **d.** $(\sqrt{17424}-\sqrt{1024}):\sqrt{4}$.

8. Calculați:

a. $\sqrt{3^2}$; **b.** $\sqrt{14^2}$; **c.** $\sqrt{45^2}$; **d.** $\sqrt{5^4}$; **e.** $\sqrt{8^6}$; **f.** $\sqrt{2^8}$; **g.** $\sqrt{3^{10}}$.

9. Calculați:

a. $\sqrt{5^2-3^2}+\sqrt{3^2+4^2}$; **b.** $\sqrt{9^2+12^2}-\sqrt{3\cdot12}$; **c.** $\sqrt{25^2-20^2}:3+2\cdot\sqrt{121}$.

10. Calculați:

a. $(\sqrt{196}-\sqrt{169})\cdot\sqrt{100}+\sqrt{225}$; **b.** $(\sqrt{400}-\sqrt{144}):4+\sqrt{196}:7$;

c. $\sqrt{3+\sqrt{36}}+\sqrt{16-\sqrt{49}}$; **d.** $\sqrt{6\cdot\sqrt{36}}+\sqrt{9\cdot\sqrt{81}}-\sqrt{20\cdot\sqrt{25}}$.

11. Arătați că numărul a este pătrat perfect, apoi calculați $\sqrt{a}$:

a. $1+3+5+7+9+11$; **b.** $(1+2+3+...+17):17$; **c.** $a=41\cdot(1+2+3+...+81)$.

12. Efectuați:

a. $\sqrt{2^2\cdot5+2^2\cdot4}$; **b.** $\sqrt{3^2\cdot15+3^2\cdot14-3^2\cdot4}$; **c.** $\sqrt{10^2\cdot81+10^2\cdot18+10^2}$;

d. $\sqrt{2^4\cdot3^2+2^4\cdot11+2^4\cdot5}$; **e.** $\sqrt{5^4\cdot20-5^4\cdot16+5^5}$; **f.** $\sqrt{6^4\cdot13+6^4\cdot5^2-6^4\cdot2}$.

13. Calculați x din relațiile următoare:

a. $\dfrac{x}{\sqrt{4}}=\dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{16}}$; **b.** $\dfrac{\sqrt{25}}{x}=\dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{144}}$; **c.** $\dfrac{2\cdot\sqrt{121}}{x}=\dfrac{\sqrt{49}-\sqrt{9}}{\sqrt{64}}$; **d.** $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{196}}}{x}=\dfrac{\sqrt{6^2+8^2}}{\sqrt{5+\sqrt{400}}}$.

14. Efectuați:

a. $\sqrt{3^2\cdot6^2}$; **b.** $\sqrt{8^2\cdot5^2\cdot2^2}$; **c.** $\sqrt{3^4\cdot5^4}$; **d.** $\sqrt{5^{20}\cdot6^{20}}$; **e.** $\sqrt{2^8\cdot3^{10}}$; **f.** $\sqrt{7^{16}\cdot10^{28}}$.

15. Folosind eventual minicalculatorul, efectuați:

a. $(\sqrt{15129}+\sqrt{2116}):\sqrt{169}-(\sqrt{13225}+\sqrt{841}):\sqrt{144}$;

b. $(3\cdot\sqrt{91809}+\sqrt{8281}):(\sqrt{32400}+2\cdot\sqrt{25600}):(\sqrt{168100}-\sqrt{166464})$.

16. Asociați fiecărui radical din prima linie valoarea sa din cea de-a doua linie:

a. $\sqrt{\dfrac{64}{49}}$	**b.** $\sqrt{3\dfrac{1}{16}}$	**c.** $\sqrt{\dfrac{441}{169}}$	**d.** $\sqrt{\dfrac{529}{144}}$	**e.** $\sqrt{\dfrac{1024}{361}}$	**f.** $\sqrt{\dfrac{1}{676}}$

A. $\dfrac{23}{12}$	**B.** $\dfrac{8}{7}$	**C.** $\dfrac{21}{13}$	**D.** $\dfrac{32}{19}$	**E.** $\dfrac{3}{4}$	**F.** $\dfrac{1}{24}$	**G.** $\dfrac{1}{26}$	**H.** $\dfrac{7}{4}$

17. Efectuați:

a. $\sqrt{0{,}04}$; **b.** $\sqrt{0{,}36}$; **c.** $\sqrt{0{,}0001}$; **d.** $\sqrt{2{,}56}$; **e.** $\sqrt{1{,}44}$; **f.** $\sqrt{10{,}24}$.

18. Efectuați:

a. $\sqrt{144\cdot36}$; **b.** $\sqrt{\dfrac{1{,}44}{25}}$; **c.** $\sqrt{4\cdot0{,}36}$; **d.** $\sqrt{0{,}04\cdot0{,}49}$; **e.** $\sqrt{\dfrac{1{,}69}{4}}$; **f.** $\sqrt{\dfrac{1}{2{,}56}}$.

Minitest

1. Calculați:

a. $\sqrt{16}$; **b.** $\sqrt{3{,}24}$; **c.** $\sqrt{25}+\sqrt{49}-\sqrt{36}$; **d.** $\sqrt{6^2+8^2}:\sqrt{4\cdot5^2}$. (3p)

2. Alegeți varianta corectă. Rezultatul calculului $\sqrt{5\cdot\sqrt{144}+4\cdot\sqrt{400}+\sqrt{16}}:\sqrt{3^3-5^2+2}-\sqrt{8+\sqrt{49}+7\cdot\sqrt{9}}$ este:

a. 0; **b.** 1; **c.** 2; **d.** 3. (3p)

3. Calculați $\sqrt{a}$, unde:

a. $a=2^4\cdot3^4\cdot5^4$; **b.** $a=17\cdot(1+2+3+...+17)$; **c.** $a=6^4\cdot47+6^4\cdot11+6^5$. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

1.2

Lecția 2: Mulțimea numerelor reale

Cuvinte-cheie

număr natural | număr irațional | axa numerelor | număr întreg | număr real
modulul unui număr real | număr rațional | $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ | opusul unui număr real

Numere iraționale. Mulțimea numerelor reale

Situație-problemă

După cum am văzut în Lecția 1, pătratul din Figura 1 are latura de lungime $\sqrt{2}$. Ce fel de număr este $\sqrt{2}$?

Folosind calculatorul de buzunar, obținem o aproximare cu 8 zecimale:

$$\sqrt{2} \simeq 1{,}4142135\ldots .$$

Este posibil ca ecranul calculatorului să afișeze cel mult 8 cifre; în acest caz putem folosi o aplicație a telefonului mobil, pentru a obține 15 zecimale:

$$\sqrt{2} \simeq 1{,}414213562373095\ldots .$$

Utilizând o aplicație de pe computer numită calculator științific, găsim:

$$\sqrt{2} \simeq 1{,}4142135623730950488016887242097\ldots .$$

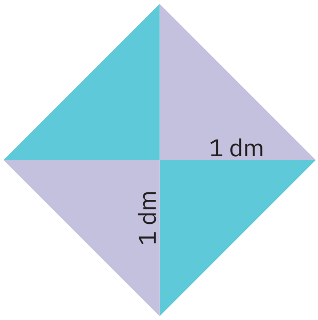


Figura 1

Zecimalele obținute până acum nu se repetă periodic, iar numerele raționale se pot scrie ca fracții zecimale finite sau periodice. Așadar, ce fel de număr este $\sqrt{2}$?

Ce observăm?

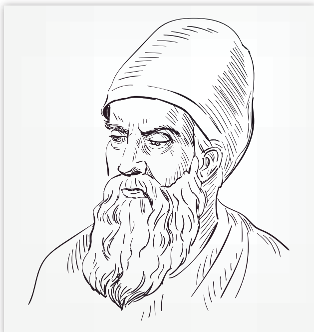
Aproximările făcute arată că *este posibilă* existența unor numere exprimate ca fracții zecimale neperiodice (în care zecimalele nu se repetă periodic). Cu alte cuvinte, aceste numere nu sunt nici fracții zecimale finite, nici fracții zecimale periodice (simple sau mixte), deci nu sunt numere raționale.

Istoria matematicii

Chiar dacă mai sus am identificat, prin diverse metode, un număr suficient de mare de zecimale ale lui $\sqrt{2}$, am studiat doar un număr *finit* de zecimale. Bazându-ne doar pe aceste estimări, oferite de calculator, nu putem decide dacă $\sqrt{2}$ este număr rațional sau nu.

În cartea sa *Elementele*, Euclid (n. aprox. 325 î.H.) a demonstrat că:

$\sqrt{2}$ nu este număr rațional.


Euclid

Într-adevăr, presupunând, prin absurd, că $\sqrt{2}$ ar fi număr rațional, ar exista numerele naturale nenule p și q, prime între ele, astfel încât $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, sau, echivalent, $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Rezultă $p^2 = 2q^2$, deci p este divizibil cu 2. Dacă $p = 2s$, atunci $4s^2 = 2q^2$, adică $q^2 = 2s^2$, deci și q este divizibil cu 2. Am obținut că numerele p și q au divizorul comun 2, contradicție cu faptul că p și q sunt prime între ele. Presupunerea făcută este falsă, deci $\sqrt{2}$ nu este număr rațional.

În consecință, întrucât nu este număr rațional, $\sqrt{2}$ se scrie ca fracție zecimală infinită și neperiodică.

De reținut

Numerele care se pot scrie ca fracții zecimale infinite și neperiodice se numesc *numere iraționale*.

Astfel, $\sqrt{2}$ și $-\sqrt{2}$ sunt numere iraționale.

Mai general, dacă numărul natural n nu este pătrat perfect, atunci $\sqrt{n}$ este irațional.

Evident, dacă x este un număr irațional pozitiv, atunci $\sqrt{x}$ este irațional. În consecință, putem vorbi despre radicalul dintr-un număr real pozitiv.

Exemple

1. Raportul dintre lungimea cercului și diametrul său este un număr irațional, notat cu litera grecească π (*pi*). Valoarea aproximativă este $\pi = 3{,}1415926535...$.

2. Raportul de aur, notat cu litera grecească φ (*phi*), este primul număr irațional descoperit și definit în istoria matematicii. Valoarea aproximativă este 1,6180339887... . Raportul de aur a fost descoperit de Euclid. Acesta a împărțit un segment de dreaptă în două părți, pe care le-a numit „medie” și „extremă rație”, astfel încât raportul φ dintre lungimea segmentului inițial și cea a segmentului mai mare este egal cu raportul dintre lungimea segmentului mare și a celui mai mic:

$$\varphi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Studii contemporane arată că numărul de aur apare în proporțiile corpului uman, la numeroase animale și plante; în structura ADN-ului și în alcătuirea sistemului solar; în arte (pictură, muzică, sculptură) și în arhitectură; dar și în rata de creștere a populației și pe piața acțiunilor.

3. Numărul $A = 1{,}010010001000010000010...$, în scrierea căruia, după fiecare cifră de 1, numărul cifrelor de 0 crește cu o unitate, este număr irațional.

Într-adevăr, dacă A ar fi o fracție zecimală periodică, cu perioada de n cifre, printre cele n cifre ar trebui să se afle neapărat cifra 1, pentru că perioada nu poate conține doar cifra 0. Ca urmare, printre orice n zecimale consecutive ale lui A ar trebui să se afle măcar un 1. Însă imediat după cea de-a n-a cifră 1 din A urmează de $n+1$ ori cifra 0, deci A este irațional.

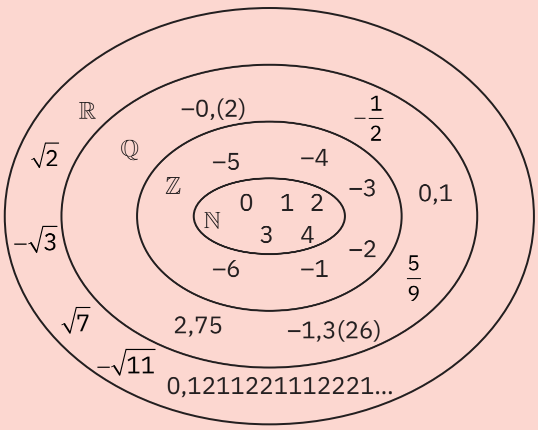
De reținut

Mulțimea numerelor reale, notată $\mathbb{R}$, este reuniunea dintre mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale.

Deoarece mulțimea numerelor reale conține mulțimea numerelor raționale, rezultă $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

În consecință, are loc șirul de incluziuni $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Mulțimea numerelor iraționale se notează cu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Așadar, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.



Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor

Mate practică

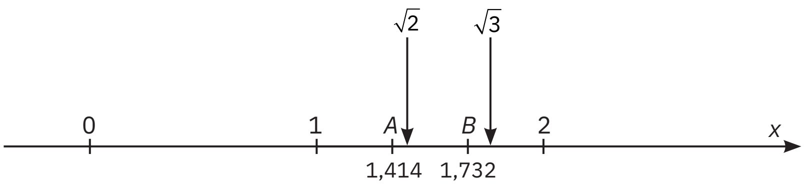
Dorim să construim din hârtie două pătrate cu ariile de 2 cm², respectiv 3 cm².

Laturile celor două pătrate au lungimile egale cu $\sqrt{2}$ cm, respectiv $\sqrt{3}$ cm, așadar trebuie să construim segmente de aceste dimensiuni.

Considerăm mai întâi aproximările lor: $\sqrt{2} = 1{,}414...$, $\sqrt{3} = 1{,}732...$.

Reprezentăm aceste aproximări pe axa numerelor, pe care fixăm unitatea de măsură de 1 cm, și obținem, pe axă, punctele A și B (Figura 2). Segmentele OA și OB au lungimile aproximativ egale cu $\sqrt{2}$ cm, respectiv $\sqrt{3}$ cm.

Figura 2



Ce observăm?

Un număr irațional se reprezintă printr-un punct pe axa numerelor. Poziția acestui punct poate fi estimată folosind o aproximare rațională, suficient de precisă, a numărului irațional respectiv.

1.2

De reținut

O dreaptă pe care se fixează un punct numit *origine*, un sens de parcurgere de la stânga spre dreapta, indicat de o săgeată, numit *sens pozitiv*, și un segment numit *unitate de măsură* se numește *axa numerelor*. Axa Ox are originea în punctul O, iar sensul pozitiv de parcurgere a punctelor sale este de la O spre x.

Fiecărui număr real îi corespunde, pe axa numerelor, un singur punct. Reciproc, fiecărui punct de pe axa numerelor îi corespunde un unic număr real, numit *coordonata* sau *abscisa* punctului. Originea axei are coordonata 0 (zero). Abscisa punctului A de pe axa numerelor se notează cu x_A. Scriem acest lucru astfel: $A(x_A)$.

Intuitiv, numerele reale ocupă toate punctele de pe axă. Întrucât unor numere reale diferite le corespund puncte distincte pe axa numerelor, putem identifica fiecare punct al axei cu un număr real.

Observații

1. Numerele reale care se reprezintă în dreapta originii se numesc numere reale *pozitive*, iar în scrierea lor zecimală, înainte de prima cifră, se scrie semnul „+”.
   La fel ca în cazul numerelor raționale, semnul unui număr pozitiv poate fi omis.
   Mulțimea numerelor reale pozitive se notează $\mathbb{R}_+$.
   Exemple de numere reale pozitive: $+3 = 3$; $+\sqrt{6} = \sqrt{6}$; $+7,(51) = 7,(51)$ etc.
2. Numerele reale care se reprezintă în stânga originii se numesc numere reale *negative*, iar în scrierea lor zecimală, înainte de prima cifră, se scrie semnul „–”.
   Mulțimea numerelor reale negative se notează $\mathbb{R}_-$.
   Exemple de numere reale negative: -2; $-\sqrt{11}$; $-7,1$; $-1,(3)$ etc.
3. Numărul real 0 nu are semn (nu este nici pozitiv, nici negativ).
   Mulțimea numerelor reale nenule se notează $\mathbb{R}^*$.
   Avem $\mathbb{R} = \mathbb{R}^* \cup \{0\} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$.
4. Deoarece numerele iraționale se exprimă ca fracții zecimale infinite, aproximările acestora prin lipsă sau prin adaos, precum și rotunjirile la un anumit ordin, se fac după aceleași reguli ca în cazul numerelor raționale.
   De exemplu, aproximările prin lipsă și prin adaos ale lui $\sqrt{2}$ la ordinul sutimilor sunt 1,41, respectiv 1,42, iar rotunjirea lui $\sqrt{7} = 2,6457\ldots$ la ordinul miimilor este 2,646.

Exemple

În Figura 3, utilizând aproximările zecimale, sunt reprezentate următoarele numere reale:

a. $-\sqrt{2} = -1,414\ldots$; **b.** $\sqrt{3} = 1,732\ldots$; **c.** $-\sqrt{5} = -2,236\ldots$.

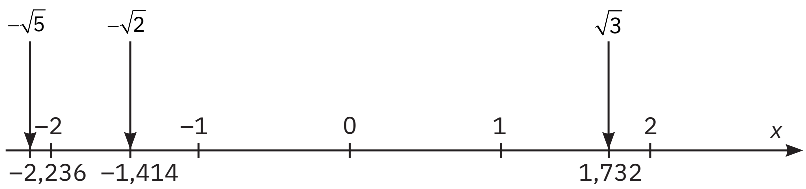


Figura 3

Mate practică

Reprezentați un triunghi dreptunghic cu catetele de lungime 1 cm. Folosind teorema lui Pitagora, constatăm că ipotenuza acestuia are lungimea de $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ cm.

Desenați un triunghi dreptunghic cu o catetă de lungime $\sqrt{2}$ cm, care să coincidă cu ipotenuza triunghiului precedent, și cu cealaltă catetă de lungime 1 cm, ca în Figura 4. Folosind teorema lui Pitagora, deducem că ipotenuza celui de-al doilea triunghi are lungimea de $\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$.

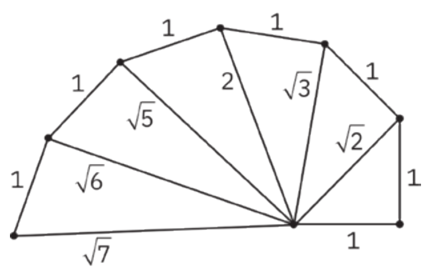


Figura 4

Continuând procedeul, construiți segmente cu lungimile de $\sqrt{4}$ cm, $\sqrt{5}$ cm, $\sqrt{6}$ cm, respectiv $\sqrt{7}$ cm.

Ce constatăm?

Folosind echerul gradat și compasul, pentru orice număr natural $n \geq 2$, putem reprezenta cu exactitate un segment de lungime $\sqrt{n}$ cm. Utilizând compasul și acest segment, putem reprezenta exact pe axă numărul real $\sqrt{n}$.

Știați că...?

Spirala prezentată mai sus a fost descoperită în secolul 5 î.H. de matematicianul Theodorus din Cyrene. Aceasta se numește *spirala lui Theodorus* sau *melcul lui Pitagora*. Theodorus s-a oprit la reprezentarea lui $\sqrt{17}$, deoarece credea că pentru $n \geq 18$ ipotenuzele triunghiurilor se suprapun peste cele reprezentate deja.

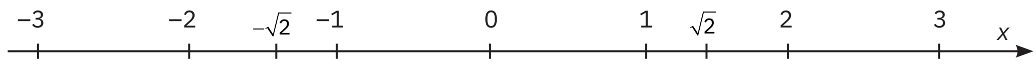
În anul 1958, matematicianul Erich Teuffel a demonstrat că oricât de mult am continua procedeul lui Theodorus, ipotenuzele spiralei nu se suprapun.

Modulul unui număr real

Situație-problemă

În Figura 5 sunt reprezentate pe o axă punctele care corespund numerelor -3, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ și 3.

Figura 5



Punctele corespunzătoare numerelor opuse -3 și 3 sunt situate la aceeași distanță față de origine. Punctele care corespund numerelor $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ sunt, de asemenea, la aceeași distanță față de origine. Deducem că și numerele $-\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}$ sunt opuse.

Ce observăm?

Orice număr real are un opus. Numerele reale opuse sunt situate pe axa numerelor la aceeași distanță față de origine, de o parte și de cealaltă a acesteia.

De reținut

Două numere reale nenule se numesc *opuse* dacă pe axa numerelor le corespund două puncte egal depărtate de origine.

Dacă x este un număr real, $-x$ se numește opusul lui x. Opusul numărului real 0 este 0.

Exemple

1. Opusul lui 6 este -6.
2. Opusul lui $-1,(5)$ este $1,(5)$.
3. Opusul lui $\sqrt{3}$ este $-\sqrt{3}$.
4. Opusul lui 3,5055055505... este −3,5055055505... .

De reținut

Modulul unui număr real x reprezintă distanța de la origine la punctul ce îi corespunde numărului x pe axa numerelor.

Modulul numărului real x, numit și *valoarea absolută* a numărului x, se notează $|x|$.

Observații

1. Din interpretarea modulului ca distanță (Figura 6), rezultă că modulul unui număr real pozitiv este numărul însuși, iar modulul unui număr real negativ este egal cu opusul numărului respectiv.
   Astfel, avem:
$$|x| = \begin{cases} x, \text{ dacă } x > 0 \\ 0, \text{ dacă } x = 0 \\ -x, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}.$$

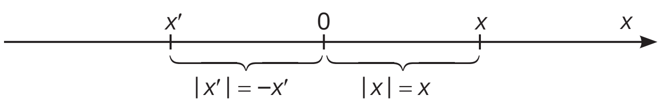


Figura 6

2. Modulele a două numere opuse sunt egale:
   $|-x| = |x|$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
   Un exemplu se poate observa în Figura 7.

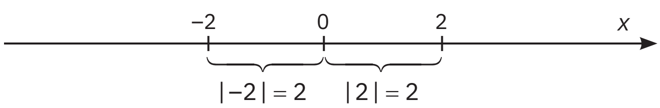


Figura 7

3. Proprietățile modulului unui număr real

a. Modulul oricărui număr real este mai mare sau egal cu 0 (este număr nenegativ):

$|x| \geq 0$, pentru orice număr real x.

În plus, $|x| = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$.

b. Dacă a și x sunt numere reale, iar $a > 0$, atunci $|x| = a$ dacă și numai dacă $x = a$ sau $x = -a$.

c. Orice două numere reale opuse au același modul: $|x| = |-x|$, pentru orice număr real x.

d. Dacă x și y sunt numere reale, atunci $|x| = |y|$ dacă și numai dacă $x = y$ sau $x = -y$.

e. $\sqrt{x^2} = |x|$, pentru orice număr real x.

f. Pe mulțimea numerelor reale se introduc operațiile de adunare, scădere, înmulțire, împărțire și ridicare la putere, extinzând în mod natural operațiile din mulțimea numerelor raționale.

i. Modulul sumei a două numere reale este cel mult egal cu suma modulelor celor două numere:

$|x+y| \leq |x| + |y|$, pentru orice două numere reale x și y.

ii. Modulul produsului a două numere reale este egal cu produsul modulelor celor două numere:

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, pentru orice două numere reale x și y.

iii. Modulul raportului a două numere reale este egal cu raportul modulelor celor două numere reale:

$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, pentru orice două numere reale x și y, cu $y \neq 0$.

iv. Modulul puterii cu exponent întreg a unui număr real nenul este egal cu puterea modulului acestuia:

$|x^n| = |x|^n$, pentru orice număr real nenul x și orice număr întreg n.

Exemple

Verificați proprietățile de mai sus folosind exemplele din următorul tabel:

x	y	$\|x\|$	$\|y\|$	$\|x \cdot y\|$	$\left\|\frac{x}{y}\right\|$	$\|x+y\|$	$\|x\|+\|y\|$
2	3	2	3	6	$\frac{2}{3}$	5	5
-3	-2	3	2	6	$\frac{3}{2}$	5	5
0	-8	0	8	0	0	8	8
4	-7	4	7	28	$\frac{4}{7}$	3	11
$-2\sqrt{3}$	$6\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$6\sqrt{3}$	36	$\frac{1}{3}$	$4\sqrt{3}$	$8\sqrt{3}$
$-\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	7	1	0	$2\sqrt{7}$

Observați în ce situații se obține egalitate în inegalitatea $|x+y| \leq |x| + |y|$. Justificați!

Compararea și ordonarea numerelor reale

Situație-problemă

Care dintre numerele $\sqrt{2}$ și 1,5 este mai mare? Pentru a decide acest lucru, putem alege una dintre metodele învățate la numerele raționale:

A. Comparăm scrierile zecimale ale celor două numere. Deoarece $\sqrt{2} = 1,414\ldots$, rezultă că $\sqrt{2} < 1,5$.

B. Reprezentăm $\sqrt{2}$ și 1,5 pe axa numerelor, ca în Figura 8.

Pentru că 1,5 este situat în dreapta lui $\sqrt{2}$, înseamnă că 1,5 este mai mare decât $\sqrt{2}$.

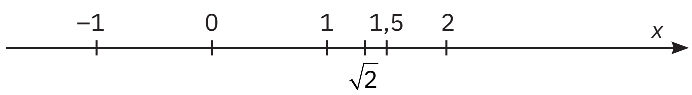


Figura 8

Ce observăm?

Știm că dintre două numere raționale reprezentate pe axa numerelor, mai mare este numărul aflat în dreapta celuilalt. Observăm că acest lucru este valabil și în cazul în care unul dintre numere este irațional sau dacă ambele numere sunt iraționale.

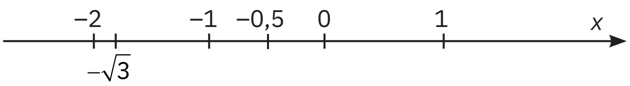
De reținut

Dintre două numere reale diferite, este mai mare numărul reprezentat mai la dreapta pe axa numerelor.

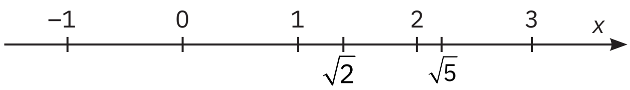
Dacă x și y sunt numere reale pozitive, atunci $x < y$ dacă și numai dacă $\sqrt{x} < \sqrt{y}$.

Exemple

1. $-\sqrt{3} < -0{,}5$, deoarece, pe axa numerelor, punctul corespunzător lui $-0{,}5$ este situat în dreapta punctului ce corespunde numărului $-\sqrt{3}$:



2. $\sqrt{5} > \sqrt{2}$, deoarece punctul corespunzător lui $\sqrt{5}$ este situat în dreapta punctului ce corespunde numărului $\sqrt{2}$, pe axa numerelor:



Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Dați două exemple de numere:

a. reale negative;
b. iraționale pozitive;
c. raționale, care nu sunt întregi;
d. raționale care nu sunt reale.

Rezolvare:

a. $-1{,}6$ și $-\sqrt{15}$;
b. $\sqrt{5}$ și $\sqrt{11}$;
c. $3{,}(2)$ și $-\frac{4}{7}$;
d. Nu există numere raționale care să nu fie reale.

2. Dați două exemple de numere reale:

a. opuse;
b. care au modulele egale cu $\sqrt{6}$;
c. care au modulele egale cu -5;
d. care se află la o distanță de 6 unități față de origine pe axa numerelor.

Rezolvare:

a. 2 și -2.
b. Numerele reale care au modulul egal cu $\sqrt{6}$ sunt $-\sqrt{6}$ și $\sqrt{6}$.
c. Modulul unui număr real este mai mare sau egal cu zero. Prin urmare, nu există numere reale care să aibă modulul egal cu -5.
d. Numerele reale care se află la distanța de 6 unități față de origine, pe axa numerelor, sunt numerele care au modulul egal cu 6, adică -6 și 6.

3. Reprezentați pe axa numerelor, apoi ordonați crescător următoarele numere:

$-\sqrt{2}$; $-1{,}5$; $\sqrt{0{,}64}$; $\sqrt{\frac{25}{4}}$; $\sqrt{6}$.

Rezolvare:

Pentru a reprezenta pe axă numerele date, mai întâi le calculăm, iar în cazul numerelor iraționale folosim o aproximare a lor.

Astfel, $-\sqrt{2} = -1{,}41...$, $\sqrt{0{,}64} = 0{,}8$, $\sqrt{\frac{25}{4}} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$, $\sqrt{6} = 2{,}44...$.

Folosind reprezentarea pe axă, ordinea crescătoare este: $-1{,}5 < -\sqrt{2} < \sqrt{0{,}64} < \sqrt{6} < \sqrt{\frac{25}{4}}$.

4. Încadrați fiecare număr real între două numere întregi consecutive:

a. $\square < 1{,}6 < \square$;
b. $\square < -\sqrt{10} < \square$;
c. $\square < \sqrt{6{,}25} < \square$.

Rezolvare:

a. $1<1{,}6<2$.

b. Putem proceda în două moduri:

1. Calculăm cu aproximație $-\sqrt{10}$: $-\sqrt{10}=-3{,}16...$. Rezultă că $-4<-\sqrt{10}<-3$.

2. Determinăm două pătrate perfecte consecutive între care e cuprins 10. Acestea sunt 9 și 16. Obținem deci $9<10<16$, de unde rezultă că $\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16}$, adică $3<\sqrt{10}<4$. Astfel, $-4<-\sqrt{10}<-3$.

c. Calculăm mai întâi $\sqrt{6{,}25}=\sqrt{(2{,}5)^2}=2{,}5$. Obținem $2<\sqrt{6{,}25}<3$.

Probleme propuse

1. Se consideră numerele: -6; $\sqrt{5}$; 0; $-2{,}8$; $\frac{4}{3}$; $-\sqrt{6}$; 7; -10; $\sqrt{15}$; 5,4(12). Precizați care dintre aceste numere sunt:

a. naturale; b. întregi; c. raționale; d. iraționale; e. reale.

2. Precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate și care sunt false:

a. 0 este număr natural; b. 1,6 este număr întreg; c. $-5{,}(4)$ este număr irațional;

d. $\sqrt{3}$ este număr real; e. $\sqrt{4}$ este număr natural; f. $-\sqrt{8}$ este număr irațional.

3. Precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate și care sunt false:

a. $9\in\mathbb{N}$; b. $0\in\mathbb{Z}$; c. $0\notin\mathbb{Q}$; d. $1{,}7\in\mathbb{R}$;

e. $-\frac{3}{4}\in\mathbb{R}$; f. $\sqrt{15}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; g. $\sqrt{15^2}\in\mathbb{N}$; h. $\sqrt{(2{,}45)^2}\in\mathbb{Q}$.

4. Folosind eventual calculatorul, determinați:

a. aproximările prin lipsă la ordinul zecimilor ale numerelor $\sqrt{5}$ și $\sqrt{74}$;

b. aproximările prin adaos la ordinul sutimilor ale numerelor $\sqrt{7}$ și $\sqrt{68}$;

c. rotunjirile la ordinul miimilor ale numerelor $\sqrt{17}$ și $\sqrt{219}$.

5. Reprezentați pe axa numerelor următoarele numere reale, apoi scrieți-le în ordine crescătoare:

a. -3; $\sqrt{3}$; $-2{,}4$; $-\sqrt{2}$; 1,3; b. $-\sqrt{6}$; $\sqrt{5}$; $\frac{3}{2}$; -2; $\sqrt{4}$; c. $-2{,}5$; $\sqrt{2}$; 1,5; $-\sqrt{6}$; $\frac{5}{2}$.

6. Completați tabelul:

x	4	1,7	$\sqrt{10}$			$-\frac{5}{12}$	
$-x$				4,12	$\sqrt{18}$		$-\sqrt{13{,}1}$
$\lvert x\rvert$							

7. Precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate și care sunt false:

a. $\lvert +3\rvert=3$; b. $\lvert -1{,}6\rvert=+1{,}6$; c. $\lvert -9\rvert=-9$; d. $\lvert\sqrt{5}\rvert=\sqrt{5}$;

e. $\left\lvert -\sqrt{13}\right\rvert=-\sqrt{13}$; f. $\left\lvert -\frac{3}{7}\right\rvert=\frac{7}{3}$; g. $\lvert 0\rvert=0$; h. $\lvert -\sqrt{7{,}5}\rvert=\sqrt{7{,}5}$.

8. Arătați că următoarele numere sunt raționale:

a. $\sqrt{\frac{4}{9}}$; b. $\sqrt{\frac{25}{81}}$; c. $\sqrt{7\frac{9}{16}}$; d. $\sqrt{0{,}81}$.

9. Stabiliți care dintre următoarele numere sunt raționale și care sunt iraționale:

a. $\sqrt{27^2}$; b. $\sqrt{5^2\cdot 2}$; c. $\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^3}$; d. $\sqrt{99}$.

10. Se consideră mulțimea $A=\left\{-6;\ \frac{3}{4};\ \sqrt{7};\ -\sqrt{12};\ 3{,}(4);\ \sqrt{24};\ 0;\ 1{,}8\right\}$. Scrieți elementele mulțimilor: $A\cap\mathbb{N}$, $A\cap\mathbb{Z}$, $A\cap\mathbb{Q}$, $A\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, $A\cap\mathbb{R}$, $A\setminus\mathbb{Q}$, $A\setminus\mathbb{R}$.

11. Încadrați fiecare număr real între două numere întregi consecutive:

a. $\square < 2,7 < \square$; **b.** $\square < \sqrt{6} < \square$; **c.** $\square < -\sqrt{20} < \square$; **d.** $\square < \sqrt{99} < \square$;

e. $\square < \sqrt{\frac{243}{5}} < \square$; **f.** $\square < \sqrt{\frac{531}{2}} < \square$; **g.** $\square < \sqrt{751,3} < \square$; **h.** $\square < -\sqrt{5,4} < \square$.

12. a. Dați două exemple de numere raționale cuprinse între 3 și 4.

b. „Două numere iraționale cuprinse între 3 și 4 sunt ... și ... .” Completați spațiile libere pentru a obține un enunț adevărat.

13. Determinați elementele mulțimilor:

a. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 4\}$; **b.** $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < \sqrt{x} < 4\}$; **c.** $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq \sqrt{x} < 3\}$.

14. Comparați numerele:

a. $\sqrt{2}$ și $1,5$; **b.** $-\sqrt{3}$ și -2; **c.** $\frac{2}{3}$ și $\sqrt{0,36}$; **d.** $-\sqrt{34}$ și $-\sqrt{35}$.

15. Ordonați crescător numerele:

a. $-4; -3; 9; -2,(64); -3,89; -2,6$; **b.** $-\sqrt{11}; \sqrt{10}; \sqrt{8}; -\sqrt{10}; \sqrt{7}$; **c.** $1; \sqrt{3}; 2; \sqrt{2}; 1,5$.

16. Calculați:

a. $|1 - 1,5|$; **b.** $\left|\frac{1}{2} - 2\right|$; **c.** $|\sqrt{2} - 1|$; **d.** $|\sqrt{5} - \sqrt{3}|$;

e. $|4 - \sqrt{17}|$; **f.** $|\sqrt{8} + 3|$; **g.** $|-\sqrt{5} - \sqrt{6}|$; **h.** $|-\sqrt{7} + 2|$.

17. Considerăm mulțimea $A = \{\sqrt{1}; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \ldots; \sqrt{30}\}$.

a. Stabiliți câte numere raționale și câte numere iraționale conține mulțimea A.

b. Calculați suma pătratelor numerelor iraționale din mulțimea A.

18. Arătați că numărul $\sqrt{x}$ este rațional în fiecare dintre următoarele cazuri:

a. $x = 3^2 + 4^2$; **b.** $x = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$; **c.** $x = 7^2 + 24^2$; **d.** $x = 7^{100}$.

19. Arătați că următoarele numere sunt iraționale:

a. $\sqrt{1 + 2 + 3 + \ldots + 10}$; **b.** $\sqrt{5^{10} + 6^{10} + 1}$; **c.** $\sqrt{10^{10} + 11^{11} + 12^{12}}$.

20. Determinați numerele reale x, știind că:

a. $|x| = \sqrt{5}$; **b.** $|x| = -\sqrt{10}$; **c.** $|x| \leq 0$; **d.** $|x| > 0$.

21. Demonstrați că dacă x este un număr irațional pozitiv, atunci $\sqrt{x}$ este irațional.

22. Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -\sqrt{15} < |x| < \sqrt{14}\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{13} < |x| < \sqrt{23}\}$ și $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq \sqrt{17}\}$.

Determinați $A \cap B$, $B \cap C$ și $C \cap A$.

23. Determinați valorile cifrei x din baza 10, astfel încât:

a. $\sqrt{\overline{x76}} \in \mathbb{Q}$; **b.** $\sqrt{\overline{x84}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; **c.** $\sqrt{\frac{\overline{84x}}{45}} \in \mathbb{Q}$; **d.** $\sqrt{\frac{\overline{x2}}{2}} \notin \mathbb{Q}$.

Minitest

1. Reprezentați pe axa numerelor următoarele numere reale, apoi scrieți-le în ordine crescătoare:

$-1,5$; $-\sqrt{3}$; $0,5$; $\sqrt{5}$; $\frac{3}{2}$. (3p)

2. Mulțimea $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq \sqrt{x} < 3\}$ este egală cu:

a. $\{5; 6; 7; 8\}$; **b.** $\{4; 5; 6; 7; 8\}$; **c.** $\{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$; **d.** $\{5; 6; 7; 8; 9\}$. (3p)

Alegeți litera corespunzătoare răspunsului corect.

3. Se consideră mulțimea $A = \left\{-4; \sqrt{2}; -\sqrt{7}; \sqrt{10}; -1,(25); \frac{1}{4}; 0; -11,6\right\}$.

Scrieți elementele mulțimilor: $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap \mathbb{Q}$, $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $A \cap \mathbb{R}$, $A \setminus \mathbb{Q}$, $A \setminus \mathbb{R}$. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

1.3

Lecția 3: Reguli de calcul cu radicali

Cuvinte-cheie

produsul radicalilor | scoaterea unui factor de sub radical
câtul radicalilor | introducerea unui factor sub radical

Produsul radicalilor

Situație-problemă

Căutăm o legătură între radicalul produsului a două numere reale pozitive și produsul radicalilor acelor numere.

Pentru numerele 4 și 9, obținem: $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=2\cdot3=6$ și $\sqrt{4\cdot9}=\sqrt{36}=6$.

Așadar, $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=\sqrt{4\cdot9}$.

Analog, pentru 16 și 36, rezultă: $\sqrt{16}\cdot\sqrt{36}=4\cdot6=24$, iar $\sqrt{16\cdot36}=\sqrt{576}=24$. Deci $\sqrt{16}\cdot\sqrt{36}=\sqrt{16\cdot36}$.

Ce observăm?

Produsul dintre radicalii numerelor 4 și 9 este egal cu radicalul produsului numerelor 4 și 9.
La fel se întâmplă în cazul numerelor 16 și 36.

De reținut

Produsul radicalilor a două numere reale pozitive este egal cu radicalul produsului celor două numere.
Altfel spus,

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}\text{, pentru orice numere reale } a\geq0,\ b\geq0.$$

Egalitatea de mai sus se scrie și sub forma:

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \text{ (descompunerea unui radical în produs de radicali).}$$

Exemple

1. $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$	2. $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$
$\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}=\sqrt{2\cdot18}=\sqrt{36}=6$;	$\sqrt{25\cdot36}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{36}=5\cdot6=30$;
$\sqrt{242}\cdot\sqrt{50}=\sqrt{242\cdot50}=\sqrt{12100}=110$;	$\sqrt{0{,}25\cdot9}=\sqrt{0{,}25}\cdot\sqrt{9}=0{,}5\cdot3=1{,}5$;
$\sqrt{\frac{8}{3}}\cdot\sqrt{\frac{27}{2}}=\sqrt{\frac{8}{3}\cdot\frac{27}{2}}=\sqrt{4\cdot9}=\sqrt{36}=6$;	$\sqrt{4900}=\sqrt{49\cdot100}=\sqrt{49}\cdot\sqrt{100}=7\cdot10=70$.

Câtul radicalilor

Situație-problemă

Căutăm o legătură între radicalul câtului a două numere raționale pozitive și câtul radicalilor acelor numere.

Pentru numerele 36 și 4, obținem: $\sqrt{36}:\sqrt{4}=6:2=3$ și $\sqrt{36:4}=\sqrt{9}=3$.

Deci $\sqrt{36}:\sqrt{4}=\sqrt{36:4}$.

Analog, pentru 25 și 9, rezultă: $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}}=\frac{5}{3}$ și $\sqrt{\frac{25}{9}}=\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2}=\frac{5}{3}$.

Deci $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}}=\sqrt{\frac{25}{9}}$.

Ce observăm?

Câtul dintre radicalii numerelor 36 și 4 este egal cu radicalul câtului dintre numerele 36 și 4.
La fel se întâmplă în cazul numerelor 25 și 9.

De reținut

Câtul radicalilor a două numere reale pozitive este egal cu radicalul câtului celor două numere.
Altfel spus,

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}},\text{ pentru orice numere reale } a\geq 0,\ b>0.$$

Egalitatea de mai sus se scrie și sub forma:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\text{ (descompunerea unui radical în raport de radicali).}$$

Exemple

1. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$	2. $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{0{,}03}}=\sqrt{\frac{3}{0{,}03}}=\sqrt{100}=10;$ $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{28}{7}}=\sqrt{4}=2;$ $\frac{\sqrt{405}}{\sqrt{500}}=\sqrt{\frac{^{(5}405}{500}}=\sqrt{\frac{81}{100}}=\frac{9}{10};$	$\sqrt{\frac{36}{25}}=\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}}=\frac{6}{5};$ $\sqrt{1{,}69}=\sqrt{\frac{169}{100}}=\frac{\sqrt{169}}{\sqrt{100}}=\frac{13}{10};$ $\sqrt{5{,}(4)}=\sqrt{5\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{49}{9}}=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{9}}=\frac{7}{3}.$

Observație

Radicalul sumei a două numere pozitive nu este egal cu suma radicalilor celor două numere.

Mai exact, dacă $a, b>0$, atunci $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

De exemplu, pentru $a=16$ și $b=25$, avem $\sqrt{a}+\sqrt{b}=4+5=9$, dar $\sqrt{a+b}=\sqrt{34}\approx 5{,}83...$.

Scoaterea factorilor de sub radical

Situație-problemă

Dorim să scriem un radical sub forma unui produs, astfel încât unul dintre factori să fie diferit de 1 și produsul să nu mai conțină radicali.

Observăm că $20=4\cdot 5$, deci $\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}=2\cdot\sqrt{5}$.

Întrucât $18=9\cdot 2$, putem scrie $\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=3\cdot\sqrt{2}$.

Scriem $75=25\cdot 3$, de unde obținem $\sqrt{75}=\sqrt{25\cdot 3}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{3}=5\cdot\sqrt{3}$.

Cum $50=25\cdot 2$, rezultă: $\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot 2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}=5\cdot\sqrt{2}$.

Ce observăm?

Folosind faptul că radicalul produsului a două numere pozitive este egal cu produsul radicalilor numerelor, putem scrie unii radicali sub forma unui produs dintre un radical și un factor diferit de 1, care nu mai conține radicali.

De reținut

Pentru orice două numere reale pozitive a și b, are loc egalitatea: $\sqrt{a^2b}=a\cdot\sqrt{b}$.

Scrierea numărului $\sqrt{a^2\cdot b}$ sub forma $a\cdot\sqrt{b}$ se numește scoaterea factorului a de sub radical.

Exemple:

a. $\sqrt{5^2\cdot 3}=5\sqrt{3}$ (am scos factorul 5 de sub radical);

b. $\sqrt{7^2\cdot 11}=7\sqrt{11}$ (am scos factorul 7 de sub radical);

c. $\sqrt{3^3}=\sqrt{3^2\cdot 3}=3\sqrt{3}$ (am scos factorul 3 de sub radical);

d. $\sqrt{7^5}=\sqrt{(7^2)^2\cdot 7}=7^2\sqrt{7}=49\sqrt{7}$ (am scos o putere a lui 7 de sub radical).

Observații

1. Dacă a este un număr real oarecare și b este un număr real pozitiv, atunci are sens expresia $\sqrt{a^2b}$.
În acest caz, are loc relația:

$$\sqrt{a^2b}=|a|\cdot\sqrt{b}.$$

Exemplu: $\sqrt{(-5)^2\cdot 3}=\sqrt{(-5)^2}\cdot\sqrt{3}=|-5|\cdot\sqrt{3}=5\sqrt{3}.$

2. Dacă sub un radical se află un număr natural, scoaterea factorilor de sub radical este precedată, deseori, de descompunerea în factori primi a numărului natural respectiv.

Exemple: **a.** Descompunerea în factori primi a numărului natural 12 este $12=2^2\cdot 3$. Rezultă:
$\sqrt{12}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}.$

b. Numărul 54 se descompune în factori primi astfel: $54=2\cdot 3^3$. Atunci:
$\sqrt{54}=\sqrt{2\cdot 3^3}=\sqrt{2\cdot 3\cdot 3^2}=\sqrt{3^2\cdot 6}=3\sqrt{6}.$

Introducerea factorilor sub radical

Situație-problemă

Care dintre numerele $2\sqrt{3}$ și $3\sqrt{2}$ este mai mare?

Metoda I: Folosim valorile aproximative:
$\sqrt{3}=1{,}732...$, deci $2\sqrt{3}\simeq 3{,}464...$;
$\sqrt{2}=1{,}414...$, deci $3\sqrt{2}\simeq 4{,}242...$.
Se observă că $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$.

Metoda a II-a: Folosim regulile de calcul cu radicali:
$2\sqrt{3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{12}$;
$3\sqrt{2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{18}$.
Cum $\sqrt{12}<\sqrt{18}$, rezultă $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$.

Ce observăm?
Pentru a compara cele două numere printr-a doua metodă, am scris numerele $2\sqrt{3}$ și $3\sqrt{2}$ sub forma unui singur radical. Se spune că am introdus sub radical factorii din fața radicalilor.

De reținut

Pentru orice două numere $a, b\geq 0$ are loc egalitatea: $a\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$.

Scrierea numărului $a\cdot\sqrt{b}$ sub forma $\sqrt{a^2\cdot b}$ se numește introducerea factorului a sub radical.

Exemple:
a. $3\sqrt{11}=\sqrt{3^2\cdot 11}=\sqrt{99}$ (am introdus factorul 3 sub radical);
b. $7\sqrt{3}=\sqrt{7^2\cdot 3}=\sqrt{147}$ (am introdus factorul 7 sub radical);
c. $5\sqrt{5}=\sqrt{5^2\cdot 5}=\sqrt{5^3}$ (am introdus factorul 5 sub radical);
d. $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{7}{5}}=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\cdot\sqrt{\frac{7}{5}}=\sqrt{\frac{9}{16}}\cdot\sqrt{\frac{7}{5}}=\sqrt{\frac{9}{16}\cdot\frac{7}{5}}=\sqrt{\frac{63}{80}}$ (am introdus factorul $\frac{3}{4}$ sub radical).

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Scrieți fiecare dintre numerele următoare ca un produs de doi radicali:
a. $\sqrt{58}$; b. $\sqrt{35}$; c. $\sqrt{51}$; d. $\sqrt{187}$.

Rezolvare:
Folosim regula $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, pentru $a\geq 0$, $b\geq 0$.
a. $\sqrt{58}=\sqrt{2\cdot 29}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{29}$; b. $\sqrt{35}=\sqrt{5\cdot 7}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}$;
c. $\sqrt{51}=\sqrt{17\cdot 3}=\sqrt{17}\cdot\sqrt{3}$; d. $\sqrt{187}=\sqrt{17\cdot 11}=\sqrt{17}\cdot\sqrt{11}$.

2. Scrieți fiecare dintre numerele următoare ca un cât de doi radicali:
a. $\sqrt{\frac{24}{5}}$; b. $\sqrt{13:2}$; c. $\sqrt{0{,}147}$; d. $\sqrt{3{,}(5)}$.

Rezolvare:

Folosim regula $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, pentru $a\geq 0$, $b>0$.

a. $\sqrt{\frac{24}{5}}=\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{5}}$;

b. $\sqrt{13:2}=\sqrt{\frac{13}{2}}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$;

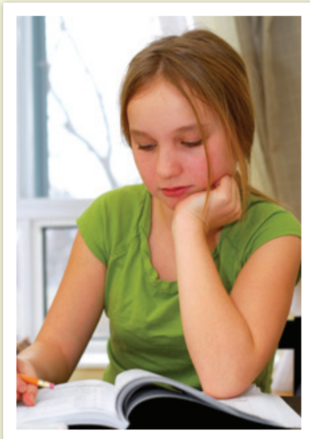
c. $\sqrt{0{,}147}=\sqrt{\frac{147}{1000}}=\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{1000}}$;

d. $\sqrt{3{,}(5)}=\sqrt{3\frac{5}{9}}=\sqrt{\frac{32}{9}}=\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{9}}$.

3. Scoateți factorii de sub radical, scriind condițiile de existență a radicalilor, acolo unde este cazul:

a. $\sqrt{24x^2}$; b. $\sqrt{12x^3}$; c. $\sqrt{20x^4y}$; d. $\sqrt{27x^5y^2}$.

Rezolvare:



a. Cum $x^2\geq 0$, oricare ar fi numărul real x, expresia $\sqrt{24x^2}$ are sens pentru orice x real. Atunci:

$$\sqrt{24x^2}=\sqrt{2^3\cdot 3\cdot x^2}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2}=2\sqrt{6}\cdot|x|=\begin{cases}2x\sqrt{6}, \text{ dacă } x\geq 0\\ -2x\sqrt{6}, \text{ dacă } x<0\end{cases}.$$

b. Condiția de existență a radicalului este $x^3\geq 0$, ceea ce conduce la $x\geq 0$. Avem:

$$\sqrt{12x^3}=\sqrt{2^2\cdot 3\cdot x^3}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^3}=2\cdot\sqrt{3}\cdot x\cdot\sqrt{x}=2x\sqrt{3x}.$$

c. Cum $x^4\geq 0$, oricare ar fi numărul real x, nu se impun condiții asupra lui x. Însă trebuie îndeplinită condiția $y\geq 0$. Atunci:

$$\sqrt{20x^4y}=\sqrt{2^2\cdot 5\cdot x^4\cdot y}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{x^4}\cdot\sqrt{y}=2\cdot\sqrt{5}\cdot x^2\cdot\sqrt{y}=2x^2\sqrt{5y}.$$

d. Condiția ce se impune este $x^5\geq 0$, ceea ce conduce la $x\geq 0$. Cum $y^2\geq 0$, oricare ar fi numărul real y, nu se impun condiții asupra lui y. Obținem:

$$\sqrt{27x^5y^2}=\sqrt{3^3\cdot x^5\cdot y^2}=\sqrt{3^3}\cdot\sqrt{x^5}\cdot\sqrt{y^2}=3\cdot\sqrt{3}\cdot x^2\cdot\sqrt{x}\cdot|y|=3x^2|y|\sqrt{3x}.$$

4. Introduceți factorii sub radical:

a. $x\sqrt{5}$, $x<0$; b. $-a\sqrt{10}$, $a<0$; c. $-y^2\sqrt{7}$, $y<0$; d. $-xy^3\sqrt{6}$, $x<0$, $y\geq 0$.

Rezolvare:

Sub radicali se introduc doar factori pozitivi, deci trebuie să fim atenți la îndeplinirea acestei condiții.

a. Cum $x<0$, rezultă că $-x>0$.

Astfel, $x\sqrt{5}=-(-x)\sqrt{5}=-\sqrt{(-x)^2}\cdot\sqrt{5}=-\sqrt{(-x)^2\cdot 5}=-\sqrt{5x^2}$.

b. Cum $a<0$, rezultă că $-a>0$. Astfel, $-a\sqrt{10}=\sqrt{(-a)^2}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{(-a)^2\cdot 10}=\sqrt{10a^2}$.

c. Avem $y<0$, dar $y^2>0$. Astfel, $-y^2\sqrt{7}=-\sqrt{(y^2)^2}\cdot\sqrt{7}=-\sqrt{(y^2)^2\cdot 7}=-\sqrt{7y^4}$.

d. Avem $x<0$, deci $-x>0$. Cum $y\geq 0$, rezultă că $y^3\geq 0$. Obținem:

$$-xy^3\sqrt{6}=\sqrt{(-x)^2}\cdot\sqrt{(y^3)^2}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{(-x)^2\cdot(y^3)^2\cdot 6}=\sqrt{6x^2y^6}.$$

5. Comparați următoarele numere:

a. $2\sqrt{7}$ cu $7\sqrt{2}$; b. $-3\sqrt{3}$ cu $-4\sqrt{2}$; c. $4\sqrt{3}$ cu 7; d. $6\sqrt{3}-4\sqrt{7}$ cu 0.

Rezolvare:

a. Introducem mai întâi factorii sub radical:

$2\sqrt{7}=\sqrt{2^2\cdot 7}=\sqrt{28}$, iar $7\sqrt{2}=\sqrt{7^2\cdot 2}=\sqrt{98}$. Cum $\sqrt{28}<\sqrt{98}$, rezultă că $2\sqrt{7}<7\sqrt{2}$.

b. $-3\sqrt{3}=-\sqrt{3^2\cdot 3}=-\sqrt{27}$, iar $-4\sqrt{2}=-\sqrt{4^2\cdot 2}=-\sqrt{32}$. Cum $-\sqrt{27}>-\sqrt{32}$, rezultă că $-3\sqrt{3}>-4\sqrt{2}$.

c. $4\sqrt{3}=\sqrt{4^2\cdot 3}=\sqrt{48}$, iar $7=\sqrt{7^2}=\sqrt{49}$. Cum $\sqrt{48}<\sqrt{49}$, rezultă că $4\sqrt{3}<7$.

d. $6\sqrt{3}=\sqrt{6^2\cdot 3}=\sqrt{108}$, iar $4\sqrt{7}=\sqrt{4^2\cdot 7}=\sqrt{112}$. Cum $\sqrt{108}<\sqrt{112}$, rezultă că $\sqrt{108}-\sqrt{112}<0$, deci $6\sqrt{3}-4\sqrt{7}<0$.

1.3

Probleme propuse

1. Scrieți cu un singur radical:

a. $\sqrt{9}\cdot\sqrt{3}$; b. $\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}$; c. $\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}$; d. $\sqrt{11}\cdot\sqrt{15}$;
e. $\sqrt{10}\cdot\sqrt{13}$; f. $\sqrt{21}\cdot\sqrt{5}$; g. $\sqrt{19}\cdot\sqrt{6}$; h. $\sqrt{22}\cdot\sqrt{3}$.

2. Calculați:

a. $\sqrt{1,2}\cdot\sqrt{5}$; b. $\sqrt{5}\cdot\sqrt{2,2}$; c. $\sqrt{3,1}\cdot\sqrt{10}$; d. $\sqrt{1,12}\cdot\sqrt{50}$;
e. $-\sqrt{3,5}\cdot\sqrt{20}$; f. $-\sqrt{0,4}\cdot(-\sqrt{15})$; g. $\sqrt{4,5}\cdot(-\sqrt{24})$; h. $\sqrt{0,06}\cdot\sqrt{50}$.

3. Calculați:

a. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}$; b. $\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{5}$; c. $-\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{\frac{2}{7}}$; d. $\sqrt{1\frac{4}{5}}\cdot\sqrt{2\frac{1}{6}}$;
e. $-\sqrt{0,5}\cdot(-\sqrt{1,(3)})$; f. $\sqrt{0,(5)}\cdot(-\sqrt{1,1})$; g. $\sqrt{2,(2)}\cdot\sqrt{0,75}$; h. $\sqrt{0,0(4)}\cdot\sqrt{13,5}$.

4. Arătați că următoarele calcule au ca rezultat un număr natural:

a. $\sqrt{5}\cdot\sqrt{3,2}$; b. $\sqrt{6,25}\cdot\sqrt{4}$; c. $-\sqrt{0,9}\cdot(-\sqrt{40})$; d. $\sqrt{200}\cdot\sqrt{0,32}$;
e. $\sqrt{\frac{4}{5}}\cdot\sqrt{125}$; f. $\sqrt{1\frac{3}{7}}\cdot\sqrt{0,7}$; g. $\sqrt{5,(3)}\cdot\sqrt{0,75}$; h. $\sqrt{2,1(3)}\cdot\sqrt{7,5}$.

5. Scrieți fiecare dintre următoarele numere ca un produs de doi radicali:

a. $\sqrt{6}$; b. $\sqrt{35}$; c. $\sqrt{49}$; d. $\sqrt{28}$; e. $\sqrt{46}$; f. $\sqrt{88}$; g. $\sqrt{164}$; h. $\sqrt{250}$.

6. Scrieți utilizând un singur radical:

a. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$; b. $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$; c. $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{15}}$; d. $\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{2}}$; e. $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{7}}$; f. $\frac{\sqrt{55}}{\sqrt{11}}$; g. $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{42}}$; h. $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{280}}$.

7. Scrieți fiecare dintre numerele următoare ca un cât de doi radicali:

a. $\sqrt{\frac{2}{7}}$; b. $\sqrt{\frac{3}{10}}$; c. $\sqrt{4\frac{3}{5}}$; d. $\sqrt{5\frac{7}{10}}$; e. $\sqrt{0,7}$; f. $\sqrt{1,325}$; g. $\sqrt{3,(2)}$; h. $\sqrt{2,4(1)}$.

8. Scoateți factorii de sub radical:

a. $\sqrt{12}$; b. $\sqrt{20}$; c. $\sqrt{68}$; d. $\sqrt{60}$; e. $\sqrt{92}$; f. $\sqrt{120}$; g. $\sqrt{200}$; h. $\sqrt{252}$.

9. Scoateți factorii de sub radical:

a. $\sqrt{2^2\cdot3+3\sqrt{4}}$; b. $\sqrt{2^3\cdot5+2\sqrt{25}}$; c. $\sqrt{2^2\cdot3^2+5\sqrt{16}}$; d. $\sqrt{25\cdot4-2\sqrt{25}}$;
e. $\sqrt{4\sqrt{121}+2^3\cdot3^2}$; f. $\sqrt{6^2\cdot5+3\sqrt{36}}$; g. $\sqrt{15^2\cdot2-6\sqrt{225}}$; h. $\sqrt{67\cdot2^2+5\sqrt{361}}$.

10. Scoateți factorii de sub radical:

a. $\sqrt{\frac{48}{25}}$; b. $\sqrt{\frac{68}{144}}$; c. $\sqrt{\frac{192}{169}}$; d. $\sqrt{\frac{245}{256}}$; e. $\sqrt{\frac{450}{81}}$; f. $\sqrt{\frac{864}{121}}$; g. $\sqrt{\frac{748}{289}}$; h. $\sqrt{\frac{875}{441}}$.

11. Scoateți factorii de sub radical, scriind condițiile de existență a radicalilor, acolo unde este cazul:

a. $\sqrt{20x^2}$; b. $\sqrt{45x^2y}$; c. $\sqrt{32x^3y^2}$; d. $\sqrt{68x^4y^6}$.

12. Asociați fiecărui număr din prima linie scrierea sa echivalentă din cea de-a doua linie:

a. $2\sqrt{5}$	b. $3\sqrt{6}$	c. $4\sqrt{2}$	d. $9\sqrt{3}$	e. $-2\sqrt{7}$	f. $-4\sqrt{5}$	g. $-5\sqrt{10}$	h. $-7\sqrt{6}$

A. $\sqrt{243}$	B. $\sqrt{32}$	C. $-\sqrt{28}$	D. $\sqrt{18}$	E. $-\sqrt{250}$	F. $-\sqrt{80}$	G. $-\sqrt{294}$	H. $\sqrt{20}$	I. $\sqrt{54}$

13. Introduceți factorii sub radical:

a. $\frac{1}{3}\sqrt{7}$; b. $\frac{2}{5}\sqrt{20}$; c. $-\frac{3}{7}\sqrt{14}$; d. $-\frac{4}{3}\sqrt{45}$;
e. $0,3\sqrt{\frac{5}{3}}$; f. $-1,(2)\sqrt{\frac{3}{11}}$; g. $2,(1)\sqrt{0,81}$; h. $0,3(4)\sqrt{\frac{81}{31}}$.

14. Introduceți factorii sub radical:

a. $x\sqrt{2}$, $x>0$; b. $-x\sqrt{5}$, $x<0$; c. $-x^3\sqrt{10}$, $x<0$;
d. $x^2\sqrt{6}$, $x<0$; e. $-xy\sqrt{7}$, $x<0$, $y\geq 0$; f. $-x^3y^2\sqrt{7}$, $x>0$, $y<0$.

15. Comparați următoarele numere:

a. $2\sqrt{5}$ cu $3\sqrt{2}$; b. $2\sqrt{7}$ cu $3\sqrt{3}$; c. $4\sqrt{2}$ cu $2\sqrt{10}$; d. $-3\sqrt{6}$ cu $-2\sqrt{14}$;
e. $-2\sqrt{23}$ cu $-4\sqrt{6}$; f. $3\sqrt{7}$ cu 8; g. $-4\sqrt{5}$ cu -9; h. $5\sqrt{5}-11$ cu 0.

16. Ordonați crescător elementele mulțimilor A și B:

$A=\{2\sqrt{2};\sqrt{21};2\sqrt{6};3\sqrt{2};2\sqrt{5};\sqrt{19}\}$; $B=\{2\sqrt{7};3\sqrt{3};5;2\sqrt{10};5\sqrt{2};4\sqrt{3}\}$.

17. În Figura 1, pe axa Ox a numerelor reale sunt reprezentate punctele A, B, C, D, E, F și G care au, în altă ordine, abscisele $2\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{0,25}$, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{0,64}$, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.

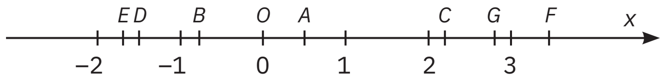


Figura 1

a. Reprezentați pe axă punctele $H(1)$, $I(-3)$ și $J\left(\sqrt{2}\right)$.
b. Determinați abscisele punctelor A, B, C, D, E, F și G.
c. Scrieți perechile de puncte reprezentate pe axă ale căror abscise au produsul număr întreg.

Minitest

1. Calculați:

a. $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}$; b. $\sqrt{1,2}\cdot\sqrt{\dfrac{125}{6}}$; c. $\dfrac{\sqrt{156}}{\sqrt{26}}$; d. $\sqrt{5,(4)}\cdot 3$. (3p)

2. Rezultatul calculului $|\sqrt{3}-1|+|\sqrt{3}-2|+|-1|$ este:

a. 2; b. $\sqrt{3}$; c. $2+\sqrt{3}$; d. 0. (3p)

Alegeți litera corespunzătoare răspunsului corect.

3. Puneți între cele două numere unul dintre semnele $<$, $=$ sau $>$, astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

a. $3\sqrt{2}$ $\square$ $2\sqrt{6}$; b. $-2\sqrt{7}$ $\square$ $-3\sqrt{3}$; c. $3\sqrt{11}$ $\square$ 10; d. $4\sqrt{5}-9$ $\square$ 0. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Lecția 4: Adunarea și scăderea numerelor reale

Cuvinte-cheie

adunare | sumă | termeni asemenea | scădere | diferență

Adunarea numerelor reale

Situație-problemă

Triunghiul din Figura 1 are laturile de lungime 2 dm, x dm și y dm, unde x și y sunt numere reale.

Ne propunem să determinăm perimetrul triunghiului în fiecare dintre următoarele cazuri:

1. $x = 2{,}23$ și $y = 1{,}41$; **2.** $x = \sqrt{5}$ și $y = \sqrt{2}$.

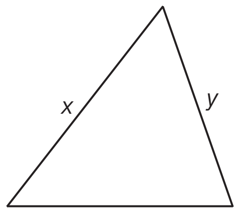


Figura 1

În primul caz, cu $x = 2{,}23$ și $y = 1{,}41$, perimetrul este o sumă de numere raționale. Obținem:

$$P = 2 + 2{,}23 + 1{,}41 = 5{,}64 \text{ dm}.$$

În al doilea caz, căutăm să dăm un sens expresiei $\sqrt{5} + \sqrt{2}$. Să considerăm pe axa numerelor punctele A și B, de abscise $\sqrt{2}$, respectiv $\sqrt{5}$, ca în Figura 2. Atunci $OA = \sqrt{2}$ și $OB = \sqrt{5}$.

Construim apoi un punct C, la dreapta lui B, astfel încât $BC = OA = \sqrt{2}$. Întrucât $OB + BC = OC$, are sens să spunem că $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ este acel număr real căruia îi corespunde pe axă punctul C.

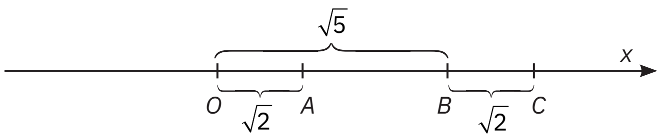


Figura 2

Putem proceda asemănător și pentru a atribui un sens expresiilor $2 + \sqrt{2}$ sau $\sqrt{5} + 2$ sau chiar $2 + \sqrt{5} + \sqrt{2}$.

Ce observăm?

Suma a două numere reale este un număr real. Exemplul de mai sus arată cum putem determina punctul de pe axa numerelor corespunzător sumei a două numere reale pozitive.

De reținut

Prin adunarea a două numere reale a și b se obține un număr real, notat $a + b$, numit *suma* numerelor a și b. Numerele a și b se numesc *termenii* sumei.

Proprietățile adunării numerelor reale

1. Adunarea numerelor reale este asociativă: $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$, pentru orice numere reale a, b, c.
2. Adunarea numerelor reale este comutativă: $a + b = b + a$, pentru orice numere reale a și b.
3. Numărul real 0 este element neutru: $a + 0 = 0 + a = a$, pentru orice număr real a.
4. Oricare ar fi numărul real a, există un număr real, notat $-a$ și denumit opusul lui a, cu proprietatea $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Observație

1. Calculul aproximativ al sumei a două sau mai multe numere iraționale

Pentru calculul aproximativ al sumei a două numere iraționale, putem încadra cele două numere între aproximările lor prin lipsă și prin adaos. Aproximarea (estimarea) sumei este cu atât mai exactă, cu cât aproximările termenilor sumei conțin mai multe zecimale.

Să analizăm încă o dată problema prezentată mai înainte. Pentru $x=\sqrt{5}$ și $y=\sqrt{2}$, avem:

Estimarea (pentru x și y)	$x=\sqrt{5}$	$y=\sqrt{2}$	$x+y$
cu eroare mai mică de 0,1	$2{,}2<x<2{,}3$	$1{,}4<y<1{,}5$	$3{,}6<x+y<3{,}8$
cu eroare mai mică de 0,01	$2{,}23<x<2{,}24$	$1{,}41<y<1{,}42$	$3{,}64<x+y<3{,}66$
cu eroare mai mică de 0,001	$2{,}236<x<2{,}237$	$1{,}414<y<1{,}415$	$3{,}650<x+y<3{,}652$

Utilizând datele aflate pe ultima linie, obținem $5{,}650<P<5{,}652$, adică $P\simeq 5{,}65$ dm (primele două zecimale sunt exacte).

2. Calculul sumei a două sau mai multe numere de forma $a\sqrt{d}$ (unde d este fixat)

Pentru a aduna mai multe numere reale de forma $a\sqrt{d}$, $d\geq 0$, care au același număr sub radical, se adună factorii din fața radicalilor, iar rezultatul se înmulțește cu radicalul.

Cu alte cuvinte, dacă a, b, c, d sunt numere reale și $d\geq 0$, atunci:

i. $a\sqrt{d}+b\sqrt{d}=(a+b)\sqrt{d}$; **ii.** $a\sqrt{d}+b\sqrt{d}+c\sqrt{d}=(a+b+c)\sqrt{d}$.

Exemple

1. $3\sqrt{2}+7\sqrt{2}=(3+7)\cdot\sqrt{2}=10\sqrt{2}$;
2. $2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=(2+3)\cdot\sqrt{3}=5\sqrt{3}$;
3. $4\sqrt{5}+8\sqrt{5}+\sqrt{5}=(4+8+1)\cdot\sqrt{5}=13\sqrt{5}$;
4. $\sqrt{10}+6\sqrt{10}+\sqrt{10}=(1+6+1)\cdot\sqrt{10}=8\sqrt{10}$.

Scăderea numerelor reale

De reținut

Diferența a două numere reale a și b este numărul real d cu proprietatea $a=b+d$.

Diferența numerelor a și b se notează $a-b$. Numărul a se numește *descăzut*, iar b se numește *scăzător*. Operația prin care numerelor a și b li se asociază diferența lor se numește scădere.

Scăderea a două numere reale se efectuează adunând descăzutul cu opusul scăzătorului:

$a-b=a+(-b)$, pentru orice numere reale a și b.

Diferența numerelor $a\sqrt{d}$ și $b\sqrt{d}$, $d\geq 0$, se efectuează astfel:

$a\sqrt{d}-b\sqrt{d}=(a-b)\sqrt{d}$.

Exemple

1. $(2+\sqrt{2})-\sqrt{2}=2+\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=2$;
2. $6\sqrt{5}-2\sqrt{5}=(6-2)\sqrt{5}=4\sqrt{5}$;
3. $20\sqrt{6}-13\sqrt{6}-\sqrt{6}=(20-13-1)\sqrt{6}=6\sqrt{6}$.

Observație

O succesiune de adunări de numere reale se numește *sumă algebrică* de numere reale.

Opusul unei sume algebrice de numere reale este suma algebrică a opușilor termenilor sumei.

De exemplu, opusul sumei algebrice $s=2\sqrt{3}-\sqrt{7}+5-3{,}(6)$ este suma algebrică:

$$s'=-s=-\left(2\sqrt{3}-\sqrt{7}+5-3{,}(6)\right)=-2\sqrt{3}+\sqrt{7}-5+3{,}(6).$$

Se observă că semnul „minus” în fața unei paranteze schimbă semnul termenilor din paranteză.

Investigație

Desenați axa Ox a numerelor și reprezentați pe ea punctele A, B, C, D, având abscisele $x_A=\sqrt{2}$, $x_B=1+2\sqrt{2}$, $x_C=-2$ și $x_D=-1-\sqrt{2}$, ca în Figura 3.

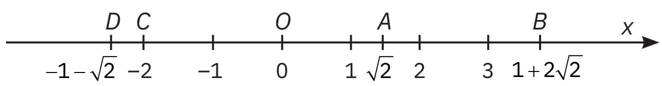


Figura 3

a. Completați căsuțele următoare cu unul dintre semnele + sau −, astfel încât să obțineți afirmații adevărate:

A1. $|x_A-x_C|=|x_A|\ \square\ |x_C|$; **B1.** $|x_A-x_B|=|x_B|\ \square\ |x_A|$; **C1.** $|x_D-x_C|=|x_D|\ \square\ |x_C|$;

A2. $AC=OA\ \square\ OC$; **B2.** $AB=OB\ \square\ OA$; **C2.** $CD=OD\ \square\ OC$.

b. Comparați rezultatele de la **A1** și **A2**, apoi pe cele de la **B1** și **B2** și de la **C1** și **C2** și faceți legătura între acestea și semnele numerelor x_A, x_B, x_C, x_D. Ce constatați?

c. Justificați rezultatele obținute și demonstrați următoarea proprietate generală:

Dacă A și B sunt două puncte oarecare de pe axa numerelor, cu abscisele x_A, respectiv x_B, atunci distanța dintre A și B este: $AB = |x_A - x_B|$.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Calculați:

a. $2\sqrt{5}-1+3\sqrt{5}+4$;

b. $4\sqrt{7}+2\sqrt{6}-\sqrt{7}+3\sqrt{6}-2\sqrt{7}$;

c. $1{,}3+4\sqrt{10}+2{,}7-\sqrt{10}-4-3\sqrt{10}$;

d. $(-2{,}5\sqrt{3}+3{,}2\sqrt{6})+0{,}3\sqrt{3}+(0{,}8\sqrt{6}+1{,}2\sqrt{3})$.

Rezolvare:

a. $2\sqrt{5}-1+3\sqrt{5}+4=(2\sqrt{5}+3\sqrt{5})+(-1+4)=5\sqrt{5}+3$.

b. $4\sqrt{7}+2\sqrt{6}-\sqrt{7}+3\sqrt{6}-2\sqrt{7}=(4\sqrt{7}-\sqrt{7}-2\sqrt{7})+(2\sqrt{6}+3\sqrt{6})=\sqrt{7}+5\sqrt{6}$.

c. $1{,}3+4\sqrt{10}+2{,}7-\sqrt{10}-4-3\sqrt{10}=(1{,}3+2{,}7-4)+(4\sqrt{10}-\sqrt{10}-3\sqrt{10})=0+0=0$.

d. $(-2{,}5\sqrt{3}+3{,}2\sqrt{6})+0{,}3\sqrt{3}+(0{,}8\sqrt{6}+1{,}2\sqrt{3})=-2{,}5\sqrt{3}+3{,}2\sqrt{6}+0{,}3\sqrt{3}+0{,}8\sqrt{6}+1{,}2\sqrt{3}=$

$=(-2{,}5\sqrt{3}+0{,}3\sqrt{3}+1{,}2\sqrt{3})+(3{,}2\sqrt{6}+0{,}8\sqrt{6})=-\sqrt{3}+4\sqrt{6}$.

2. Calculați, scoțând mai întâi factorii de sub radical:

a. $\sqrt{8}+\sqrt{50}-\sqrt{32}$;

b. $2\sqrt{27}-5\sqrt{12}+\sqrt{48}-3\sqrt{108}$.

Rezolvare:

a. $\sqrt{8}+\sqrt{50}-\sqrt{32}=2\sqrt{2}+5\sqrt{2}-4\sqrt{2}=(2+5-4)\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}$.

b. $2\sqrt{27}-5\sqrt{12}+\sqrt{48}-3\sqrt{108}=2\cdot3\sqrt{3}-5\cdot2\sqrt{3}+4\sqrt{3}-3\cdot6\sqrt{3}=$

$=6\sqrt{3}-10\sqrt{3}+4\sqrt{3}-18\sqrt{3}=(6-10+4-18)\cdot\sqrt{3}=-18\sqrt{3}$.

3. Calculați:

a. $\frac{1}{2}\sqrt{8}-0{,}(4)\sqrt{162}+0{,}5\sqrt{72}$;

b. $\frac{3}{2}\sqrt{20}-1{,}5\sqrt{24}-2{,}(3)\sqrt{45}+0{,}4\sqrt{150}$;

c. $2\sqrt{x}+3\sqrt{y}+6\sqrt{x}-3\sqrt{y}$, unde $x, y \geq 0$;

d. $6\sqrt{a^2}-4\sqrt{a^3}+7\sqrt{a^3}-\sqrt{a^2}$, unde $a > 0$.

Rezolvare:

a. $\frac{1}{2}\sqrt{8}-0{,}(4)\sqrt{162}+0{,}5\sqrt{72}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}-\frac{4}{9}\cdot9\sqrt{2}+\frac{1}{2}\cdot6\sqrt{2}=\sqrt{2}-4\sqrt{2}+3\sqrt{2}=(1-4+3)\cdot\sqrt{2}=0\cdot\sqrt{2}=0$.

b. $\frac{3}{2}\sqrt{20}-1{,}5\sqrt{24}-2{,}(3)\sqrt{45}+0{,}4\sqrt{150}=\frac{3}{2}\cdot2\sqrt{5}-\frac{3}{2}\cdot2\sqrt{6}-\frac{7}{3}\cdot3\sqrt{5}+\frac{2}{5}\cdot5\sqrt{6}=$

$=3\sqrt{5}-3\sqrt{6}-7\sqrt{5}+2\sqrt{6}=(3\sqrt{5}-7\sqrt{5})+(-3\sqrt{6}+2\sqrt{6})=-4\sqrt{5}+(-\sqrt{6})=-4\sqrt{5}-\sqrt{6}$.

c. $2\sqrt{x}+3\sqrt{y}+6\sqrt{x}-3\sqrt{y}=(2\sqrt{x}+6\sqrt{x})+(3\sqrt{y}-3\sqrt{y})=8\sqrt{x}+0=8\sqrt{x}$.

d. Cum $a>0$, avem $\sqrt{a^2}=|a|=a$ și $\sqrt{a^3}=a\sqrt{a}$. Obținem

$6\sqrt{a^2}-4\sqrt{a^3}+7\sqrt{a^3}-\sqrt{a^2}=6a-4a\sqrt{a}+7a\sqrt{a}-a=(6a-a)+(-4a\sqrt{a}+7a\sqrt{a})=5a+3a\sqrt{a}$.

4. Comparați numerele a și b, unde:

a. $a=\sqrt{5}-1$, $b=1$;

b. $a=\sqrt{7}+1$, $b=6-\sqrt{7}$;

c. $a=\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{25}$, $b=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+...+\sqrt{26}$.

Rezolvare:

a. Calculăm diferența numerelor: $a-b=\sqrt{5}-1-1=\sqrt{5}-2=\sqrt{5}-\sqrt{4}>0$.
Deoarece $a-b>0$, rezultă că $a>b$.

b. Calculăm diferența numerelor: $a-b=(\sqrt{7}+1)-(6-\sqrt{7})=\sqrt{7}+1-6+\sqrt{7}=2\sqrt{7}-5=\sqrt{28}-\sqrt{25}>0$.
Deoarece $a-b>0$, rezultă că $a>b$.

c. Calculăm diferența numerelor:

$a-b=(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{25})-(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{26})=$

$=\sqrt{1}+\cancel{\sqrt{2}}+\cancel{\sqrt{3}}+\ldots+\cancel{\sqrt{25}}-\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{4}}+\ldots-\sqrt{26}=\sqrt{1}-\sqrt{26}<0.$

Deoarece $a-b<0$, rezultă că $a<b$.

Probleme propuse

1. Calculați:
   a. $5\sqrt{2}+8\sqrt{2}$; b. $6\sqrt{7}+4\sqrt{7}$; c. $9\sqrt{5}-7\sqrt{5}$; d. $30\sqrt{6}-22\sqrt{6}$;
   e. $11\sqrt{3}+8\sqrt{3}+10\sqrt{3}$; f. $15\sqrt{7}-3\sqrt{7}+5\sqrt{7}$; g. $18\sqrt{6}+2\sqrt{6}-9\sqrt{6}$; h. $\sqrt{3}-5\sqrt{3}-2\sqrt{3}$.
2. Calculați:
   a. $2\sqrt{3}+5\sqrt{2}+6\sqrt{3}+4\sqrt{2}$; b. $6\sqrt{6}+4\sqrt{7}+\sqrt{6}+12\sqrt{7}$; c. $\sqrt{5}+3\sqrt{2}-\sqrt{2}+4\sqrt{5}$;
   d. $18\sqrt{7}-4\sqrt{10}-6\sqrt{7}-4\sqrt{10}$; e. $-20\sqrt{2}+\sqrt{11}-\sqrt{11}+5\sqrt{2}$; f. $\sqrt{6}-5\sqrt{3}+6\sqrt{6}-2\sqrt{3}$.
3. Calculați:
   a. $8\sqrt{5}-(3\sqrt{5}+4\sqrt{5})+5\sqrt{5}-3\sqrt{5}$; b. $3\sqrt{6}+12\sqrt{6}+(10\sqrt{6}-\sqrt{6})+8\sqrt{6}$;
   c. $3\sqrt{3}-(4\sqrt{2}-2\sqrt{3})-(6\sqrt{3}-3\sqrt{2})-\sqrt{3}$; d. $-3\sqrt{3}+2\sqrt{6}+(8\sqrt{3}-10\sqrt{6}+3\sqrt{3})-\sqrt{6}$;
   e. $(\sqrt{5}+3\sqrt{7})+(8\sqrt{5}-\sqrt{7}+3\sqrt{5})-\sqrt{7}$; f. $(3\sqrt{15}-\sqrt{13})-(4\sqrt{15}-9\sqrt{13}-\sqrt{15})+\sqrt{13}$.
4. Calculați, în fiecare caz, $a+b$ și $a-b$, unde:
   a. $a=4\sqrt{3}+2\sqrt{5},\ b=\sqrt{5}+4\sqrt{3}$; b. $a=6\sqrt{2}+4\sqrt{10},\ b=8\sqrt{2}-9\sqrt{10}$;
   c. $a=10\sqrt{7}-3\sqrt{6},\ b=18\sqrt{6}-9\sqrt{7}$; d. $a=8\sqrt{3}+7\sqrt{5}-3\sqrt{11},\ b=7\sqrt{5}-2\sqrt{3}+3\sqrt{11}$.
5. Arătați că rezultatul calculului $a+b+c$ este număr întreg în fiecare dintre cazurile:
   a. $a=7\sqrt{3}+2\sqrt{2},\ b=4\sqrt{5}-7\sqrt{3},\ c=-2\sqrt{2}-4\sqrt{5}$;
   b. $a=5\sqrt{6}-8\sqrt{14},\ b=6-5\sqrt{6},\ c=1+8\sqrt{14}$;
   c. $a=7\sqrt{15}+4,\ b=3\sqrt{15}-2,\ c=8-10\sqrt{15}$.
6. „Lungimile laturilor unui triunghi sunt egale cu $3\sqrt{6}$ cm, $4\sqrt{6}$ cm și $5\sqrt{6}$ cm. Perimetrul triunghiului este ... ." Completați spațiul liber pentru a obține un enunț adevărat.
7. „Perimetrul unui dreptunghi ce are dimensiunile egale cu $4\sqrt{5}$ dm, respectiv $2\sqrt{5}$ dm este ... ." Completați spațiul liber pentru a obține un enunț adevărat.
8. Calculați, scoțând mai întâi factorii de sub radical:
   a. $\sqrt{12}+2\sqrt{3}+\sqrt{27}$; b. $\sqrt{20}-\sqrt{80}+\sqrt{45}+\sqrt{5}$;
   c. $\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{48}+\sqrt{27}$; d. $\sqrt{50}+\sqrt{98}+\sqrt{72}-\sqrt{18}$;
   e. $\sqrt{32}-\sqrt{50}+\sqrt{128}-\sqrt{200}$; f. $\sqrt{24}+\sqrt{54}-\sqrt{96}+\sqrt{150}$.
9. Copiați în caiet, apoi completați spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate.
   a. $(\sqrt{300}+\sqrt{1000})-(\sqrt{490}-\sqrt{360})=\ldots$; b. $\sqrt{242}-(\sqrt{99}+\sqrt{704}-\sqrt{396})=\ldots$;
   c. $(\sqrt{60}+\sqrt{52})-(\sqrt{135}-\sqrt{117})=\ldots$; d. $\sqrt{675}-(\sqrt{605}+\sqrt{432})-\sqrt{720}=\ldots$;
   e. $(\sqrt{2000}+\sqrt{405})-(\sqrt{845}+\sqrt{128})=\ldots$; f. $\sqrt{700}-(\sqrt{726}-\sqrt{1008}+\sqrt{2400})=\ldots$.
10. Calculați:
    a. $4\sqrt{8}+2\sqrt{18}+5\sqrt{32}$; b. $5\sqrt{75}-2\sqrt{108}+4\sqrt{48}+2\sqrt{147}$;
    c. $6\sqrt{125}-2\sqrt{180}-3\sqrt{80}+5\sqrt{320}$; d. $3\sqrt{24}-4\sqrt{54}+5\sqrt{150}-2\sqrt{216}$;
    e. $10\sqrt{28}-2\sqrt{63}+3\sqrt{112}+4\sqrt{252}$; f. $6\sqrt{40}+3\sqrt{250}-4\sqrt{90}-2\sqrt{360}$.
11. Calculați:
    a. $\frac{3}{4}\sqrt{48}+\frac{2}{5}\sqrt{75}-\frac{5}{6}\sqrt{108}$; b. $\frac{3}{7}\sqrt{98}+\frac{1}{8}\sqrt{128}-\frac{2}{5}\sqrt{200}$;
    c. $\frac{7}{6}\sqrt{180}+\frac{11}{2}\sqrt{320}-0{,}8\sqrt{500}$; d. $\frac{6}{5}\sqrt{50}+\frac{1}{4}\sqrt{192}-0{,}(3)\sqrt{72}+1{,}(3)\sqrt{108}$;

e. $0,(2)\sqrt{162}+1,5\sqrt{800}-\frac{2}{5}\sqrt{450}$; f. $\frac{12}{7}\sqrt{245}-2,(4)\sqrt{567}-1,2\sqrt{500}+0,25\sqrt{448}$.

12. Calculați:

a. $2\sqrt{x}+3\sqrt{x}-5\sqrt{x}$, $x\ge 0$; b. $5\sqrt{4x}-3\sqrt{9x}+2\sqrt{25x}-\sqrt{49x}$, $x\ge 0$;

c. $3\sqrt{x}-2\sqrt{y}+\sqrt{x}-3\sqrt{y}$, $x\ge 0$, $y\ge 0$; d. $\sqrt{25a}-\sqrt{36b}+\sqrt{64b}-\sqrt{81a}$, $a\ge 0$, $b\ge 0$;

e. $\sqrt{8a}+\sqrt{18a}+\sqrt{50a}-\sqrt{128a}$, $a\ge 0$; f. $2\sqrt{12a}+3\sqrt{27a}-2\sqrt{48a}+\sqrt{75a}$, $a\ge 0$.

13. Calculați:

a. $\sqrt{\frac{8}{9}}+\sqrt{\frac{18}{25}}+\sqrt{\frac{32}{81}}$; b. $\sqrt{\frac{24}{25}}+\sqrt{\frac{54}{49}}-\sqrt{\frac{96}{1225}}$; c. $\sqrt{\frac{125}{36}}+\sqrt{\frac{80}{81}}-\sqrt{\frac{245}{324}}$; d. $\sqrt{2\frac{47}{64}}+\sqrt{9\frac{19}{36}}-\sqrt{5\frac{127}{144}}$.

14. Comparați numerele a și b, unde:

a. $a=\sqrt{6}-2$, $b=3$; b. $a=\sqrt{10}+1$, $b=2$;

c. $a=\sqrt{2}+5$, $b=3-\sqrt{2}$; d. $a=3+2\sqrt{7}$, $b=11-\sqrt{7}$;

e. $a=\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{49}$, $b=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+...+\sqrt{50}$.

15. Explicitați modulele:

a. $|\sqrt{10}-\sqrt{7}|$; b. $|\sqrt{14}-\sqrt{15}|$; c. $|2\sqrt{5}-3\sqrt{2}|$; d. $|4\sqrt{2}-6|$;

e. $|3\sqrt{3}+5|$; f. $|2\sqrt{14}-3\sqrt{7}|$; g. $|-2\sqrt{6}-3\sqrt{5}|$; h. $|-6\sqrt{2}+9|$.

16. Calculați:

a. $\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$; b. $\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-3)^2}$;

c. $\sqrt{(4-3\sqrt{2})^2}+\sqrt{(3\sqrt{2}-5)^2}$; d. $\sqrt{(2\sqrt{10}+6)^2}-\sqrt{(-6-2\sqrt{10})^2}$.

17. Maia și fratele ei Victor pleacă în același timp de la școală spre casă, pe drumuri diferite. Maia trece pe la grădiniță, ca să îl aducă acasă pe fratele lor mai mic, iar Victor trece pe la librărie, ca să își cumpere un caiet nou. Cele două trasee sunt desenate în Figura 4, în care $ASBC$ este un dreptunghi, vârful S reprezintă școala copiilor, vârful C este casa lor, iar punctele G și L simbolizează grădinița, respectiv librăria. Știind că $SA=300$ m, $SB=250$ m, $AL=BG=100$ m, determinați care dintre cele două trasee este mai scurt.

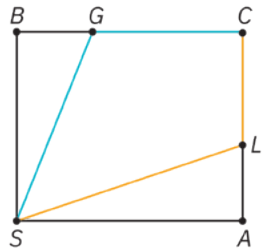


Figura 4

Joc

Puneți paranteze, astfel încât egalitățile următoare să fie adevărate:

1. $12\sqrt{2}-2\sqrt{2}+5\sqrt{2}+5\sqrt{2}=0$; **2.** $\sqrt{12}-\sqrt{27}-\sqrt{48}=3\sqrt{3}$; **3.** $15+\sqrt{18}-5+3\sqrt{2}=10$.

Minitest

1. Calculați:

a. $6\sqrt{3}+5\sqrt{3}$; b. $11\sqrt{5}-4\sqrt{5}$; c. $8\sqrt{2}-3\sqrt{3}+4\sqrt{2}+5\sqrt{3}$. (3p)

2. Alegeți varianta corectă. Dacă $a=7\sqrt{5}+3\sqrt{2}-\sqrt{5}+4\sqrt{2}$ și $b=8\sqrt{2}+9\sqrt{5}-\sqrt{2}-4\sqrt{5}$, atunci $a+b$ este egal cu:

a. $11\sqrt{5}-14\sqrt{2}$; b. $11\sqrt{5}+14\sqrt{2}$; c. $-11\sqrt{5}+14\sqrt{2}$; d. $-11\sqrt{5}-14\sqrt{2}$. (3p)

3. Efectuați calculele:

a. $\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32}+\sqrt{72}$; b. $\sqrt{48}-\sqrt{20}+\sqrt{75}+\sqrt{80}$;

c. $5\sqrt{54}-3\sqrt{40}+2\sqrt{250}-2\sqrt{96}$; d. $\frac{1}{2}\sqrt{20}+0,4\sqrt{125}-\frac{3}{10}\sqrt{500}+0,(6)\sqrt{405}$. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Lecția 5: Înmulțirea și împărțirea numerelor reale

Cuvinte-cheie

înmulțire produs inversul unui număr împărțire cât

Înmulțirea numerelor reale

Mate practică

Un teren are forma unui dreptunghi cu dimensiunile de $\sqrt{5}$ dam, respectiv $\sqrt{2}$ dam, ca în Figura 1.

a. Câți ari are suprafața terenului?

b. Câți ari are suprafața unui teren cu lungimea de două ori mai mare, iar lățimea de trei ori mai mare (Figura 2)?

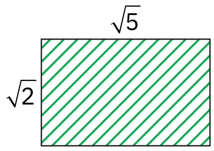


Figura 1

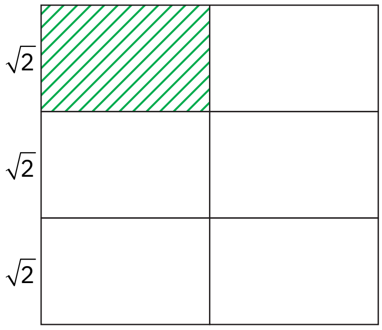


Figura 2

Răspuns:

a. $A_{teren} = L \cdot l = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{10}$ dam^2. Știm că 1 ar $= 1$ dam^2, deci $A_{teren} = \sqrt{10}$ ari.

b. Al doilea teren are dimensiunile: $L = 2 \cdot \sqrt{5}$ dam și $l = 3 \cdot \sqrt{2}$ dam.

Observăm că al doilea teren este format din șase terenuri inițiale. Deci suprafața lui este de 6 ori mai mare decât suprafața primului teren, adică este egală cu $6 \cdot \sqrt{10}$ ari. Calculând aria pe baza formulei obținem: $A_{teren} = L \cdot l = 2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{2}$ ari. Rezultă astfel că $(2 \cdot \sqrt{5}) \cdot (3 \cdot \sqrt{2}) = 6 \cdot \sqrt{10}$.

Ce observăm?

Acest produs se poate calcula și astfel: $(2 \cdot \sqrt{5}) \cdot (3 \cdot \sqrt{2}) = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 2} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$.

Deci $(2\sqrt{5}) \cdot (3\sqrt{2}) = (2 \cdot 3)\sqrt{5 \cdot 2} = 6\sqrt{10}$.

De reținut

Prin înmulțirea a două numere reale a și b se obține un număr real, notat $a \cdot b$, numit *produsul* numerelor a și b. Numerele a și b se numesc *factorii* produsului.

Proprietățile înmulțirii numerelor reale

1. Înmulțirea numerelor reale este asociativă: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$, pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2. Înmulțirea numerelor reale este comutativă: $a \cdot b = b \cdot a$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.
3. Numărul real 1 este element neutru: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.
4. Oricare ar fi numărul real $a \neq 0$, există un număr real, notat a^{-1} și numit inversul lui a, cu proprietatea $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

   Inversul unui număr real $a \neq 0$ se notează și $\frac{1}{a}$. Așadar, $a^{-1} = \frac{1}{a}$ și $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$.
5. Înmulțirea numerelor reale este distributivă în raport cu adunarea și scăderea:

   a. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$; **b.** $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$, pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Observații

1. Înmulțirea numerelor reale are aceleași proprietăți ca și înmulțirea numerelor raționale.
2. Dacă un factor al unui produs este 0, atunci produsul este egal cu 0:

   $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, pentru orice număr real a.
3. Dacă un produs este 0, atunci cel puțin unul dintre factori este 0:

   dacă $a \cdot b = 0$, atunci $a = 0$ sau $b = 0$.
4. Produsul numerelor reale $a\sqrt{b}$ și $c\sqrt{d}$, unde $b \geq 0$, $d \geq 0$, se calculează folosind regula:

   $$a\sqrt{b} \cdot c\sqrt{d} = (a \cdot c) \cdot \sqrt{b \cdot d} = ac\sqrt{bd}.$$

   După efectuarea înmulțirii a două numere reale ce conțin radicali, dacă este posibil, se scot factorii de sub radical.

Exemple

1. $4\sqrt{5}\cdot 6\sqrt{11}=4\cdot 6\cdot\sqrt{5\cdot 11}=24\sqrt{55}$;
2. $5\sqrt{2}\cdot(-4\sqrt{2})=[5\cdot(-4)]\cdot\sqrt{2\cdot 2}=-20\cdot 2=-40$;
3. $2\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{12}=(2\cdot 5)\cdot\sqrt{3\cdot 12}=10\sqrt{36}=10\cdot 6=60$;
4. $5\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{4}=(5\cdot 3)\cdot\sqrt{6\cdot 4}=15\sqrt{24}=15\cdot 2\sqrt{6}=30\sqrt{6}$;
5. $(-6\sqrt{5})\cdot\sqrt{15}=(-6\cdot 1)\cdot\sqrt{5\cdot 15}=-6\sqrt{75}=-6\cdot 5\sqrt{3}=-30\sqrt{3}$.

Observații

Analizând calculul:

$$\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})-(\sqrt{6}+1)=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{6}-1=3+\cancel{\sqrt{6}}-\cancel{\sqrt{6}}-1=2,$$

se observă că am folosit distributivitatea înmulțirii față de adunare în cazul primei paranteze, iar în cazul celei de-a doua am procedat astfel: $-(\sqrt{6}+1)=(-1)\cdot(\sqrt{6}+1)=(-1)\cdot\sqrt{6}+(-1)\cdot 1=-\sqrt{6}-1$.

Acest exemplu ne conduce spre următoarea regulă:

semnul „–” scris în fața unei paranteze schimbă semnul termenilor din paranteză.

Împărțirea numerelor reale

Situație-problemă

Știm că dacă $a\cdot b=c$, atunci $a=c:b$ și $b=c:a$, unde a, b, c sunt numere raționale nenule. Ne punem problema dacă aceste relații rămân adevărate și pentru numere reale.

Pornind de la egalitatea $(2\sqrt{5})\cdot(3\sqrt{2})=6\sqrt{10}$, putem deduce că $(6\sqrt{10}):(2\sqrt{5})=3\sqrt{2}$.

Efectuând împărțirea folosind regulile de calcul cu radicali, avem:

$$(6\sqrt{10}):(2\sqrt{5})=\sqrt{36\cdot 10}:\sqrt{4\cdot 5}=\sqrt{360}:\sqrt{20}=\sqrt{360:20}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}.$$

Ce observăm?

Împărțirea $(6\sqrt{10}):(2\sqrt{5})$ se poate efectua astfel: $(6\sqrt{10}):(2\sqrt{5})=(6:2)\cdot\sqrt{10:5}=3\sqrt{2}$.

De reținut

Câtul a două numere reale a și b, $b\neq 0$, este numărul real c cu proprietatea $a=b\cdot c$.

Câtul numerelor a și b se notează $a:b$ sau $\frac{a}{b}$. Operația prin care numerelor a și b li se asociază câtul lor $a:b$ se numește *împărțire*. Numărul a se numește *deîmpărțit*, iar numărul b se numește *împărțitor*.

Câtul a două numere reale se determină *înmulțind* deîmpărțitul cu inversul împărțitorului:

$$a:b=\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}, \text{ pentru orice numere reale } a \text{ și } b,\ b\neq 0.$$

Câtul numerelor $a\sqrt{b}$ și $c\sqrt{d}$, unde $b, d>0$, $c\neq 0$, se efectuează astfel:

$$(a\sqrt{b}):(c\sqrt{d})=(a:c)\cdot\sqrt{b:d} \text{ sau } \frac{a\sqrt{b}}{c\sqrt{d}}=\frac{a}{c}\sqrt{\frac{b}{d}}.$$

Exemple

1. $\sqrt{14}:\sqrt{2}=\sqrt{14:2}=\sqrt{7}$;
2. $(6\sqrt{12}):(2\sqrt{3})=(6:2)\sqrt{12:3}=3\sqrt{4}=3\cdot 2=6$;
3. $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{^{(3}45}{3}}=\sqrt{15}$;
4. $\left(0,3\cdot\sqrt{\frac{12}{5}}\right):\left(0,(3)\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}\right)=\left(\frac{3}{10}\cdot\sqrt{\frac{12}{5}}\right):\left(\frac{^{(3}3}{9}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}\right)=\left(\frac{3}{10}:\frac{1}{3}\right)\sqrt{\frac{12}{5}:\frac{2}{5}}=\left(\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{1}\right)\sqrt{\frac{12}{5}\cdot\frac{5}{2}}=\frac{9}{10}\sqrt{6}$.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Calculați:

a. $\sqrt{2}\cdot(\sqrt{14}+\sqrt{10})$; b. $\frac{25\sqrt{14}}{3}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{35}$; c. $(18\sqrt{45}):(-3\sqrt{3}):(-\sqrt{12})$; d. $(24\sqrt{15}+30\sqrt{35}-18\sqrt{55}):(6\sqrt{5})$.

Rezolvare:

a. Aplicăm distributivitatea înmulțirii în raport cu adunarea:

$\sqrt{2}\cdot(\sqrt{14}+\sqrt{10})=\sqrt{2}\cdot\sqrt{14}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{28}+\sqrt{20}=2\sqrt{7}+2\sqrt{5}$.

b. $\dfrac{25\sqrt{14}}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{7}}{35}=\dfrac{5\sqrt{14}}{1}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{7}=\dfrac{5\sqrt{14\cdot7}}{7}=\dfrac{5\cdot7\sqrt{2}}{7}=5\sqrt{2}$.

c. $(18\sqrt{45}):(-3\sqrt{3}):(-\sqrt{12})=\left[18:(-3)\cdot\sqrt{45:3}\right]:(-2\sqrt{3})=(-6\sqrt{15}):(-2\sqrt{3})=3\sqrt{5}$.

d. $(24\sqrt{15}+30\sqrt{35}-18\sqrt{55}):(6\sqrt{5})=(24\sqrt{15}):(6\sqrt{5})+(30\sqrt{35}):(6\sqrt{5})-(18\sqrt{55}):(6\sqrt{5})=4\sqrt{3}+5\sqrt{7}-3\sqrt{11}$.

2. Calculați $a\cdot b$ și $a:b$, unde: $a=6\sqrt{54}+5\sqrt{96}$, $b=12\sqrt{12}-2\sqrt{363}$.

Rezolvare:

$a=6\sqrt{54}+5\sqrt{96}=6\cdot3\sqrt{6}+5\cdot4\sqrt{6}=18\sqrt{6}+20\sqrt{6}=38\sqrt{6}$; $b=12\sqrt{12}-2\sqrt{363}=12\cdot2\sqrt{3}-2\cdot11\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

$a\cdot b=38\sqrt{6}\cdot2\sqrt{3}=76\sqrt{18}=76\cdot3\sqrt{2}=228\sqrt{2}$ și $a:b=(38\sqrt{6}):(2\sqrt{3})=(38:2)\sqrt{6:3}=19\sqrt{2}$.

3. Scoateți factorii de sub radical, apoi calculați raportul $\dfrac{x\cdot y}{z}$, unde:

$x=5\sqrt{75}+4\sqrt{12}-2\sqrt{48}$, $y=2\sqrt{135}-4\sqrt{60}-3\sqrt{240}$, $z=2\sqrt{180}-5\sqrt{80}+3\sqrt{20}+\sqrt{720}$.

Rezolvare:

$x=5\sqrt{75}+4\sqrt{12}-2\sqrt{48}=5\cdot5\sqrt{3}+4\cdot2\sqrt{3}-2\cdot4\sqrt{3}=25\sqrt{3}+8\sqrt{3}-8\sqrt{3}=25\sqrt{3}$.

$y=2\sqrt{135}-4\sqrt{60}-3\sqrt{240}=2\cdot3\sqrt{15}-4\cdot2\sqrt{15}-3\cdot4\sqrt{15}=6\sqrt{15}-8\sqrt{15}-12\sqrt{15}=-14\sqrt{15}$.

$z=2\sqrt{180}-5\sqrt{80}+3\sqrt{20}+\sqrt{720}=2\cdot6\sqrt{5}-5\cdot4\sqrt{5}+3\cdot2\sqrt{5}+12\sqrt{5}=12\sqrt{5}-20\sqrt{5}+6\sqrt{5}+12\sqrt{5}=10\sqrt{5}$.

$\dfrac{x\cdot y}{z}=\dfrac{25\sqrt{3}\cdot(-14\sqrt{15})}{10\sqrt{5}}=\dfrac{25\cdot(-14)}{10}\sqrt{\dfrac{3\cdot15}{5}}=\dfrac{5\cdot(-14)}{2}\sqrt{3\cdot3}=5\cdot(-7)\cdot3=-105$.

Portofoliu

A. În fiecare caz, dă câte un exemplu de două numere iraționale a și b, pentru care condiția specificată să fie adevărată:

a. $a+b\in\mathbb{Q}$; **b.** $a\cdot b\in\mathbb{Q}$; **c.** $a+b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; **d.** $a\cdot b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

B. Demonstrează că dacă $a\in\mathbb{Q}$ și $b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, atunci $a+b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, iar dacă în plus $a\neq0$, atunci $a\cdot b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

C. Compară rezultatele de la punctele **A** și **B** cu cele cunoscute din lecțiile 4 și 5, din paragrafele referitoare la suma și produsul a două numere raționale, și adaugă concluziile în portofoliul personal.

Adună toate materialele pe care le realizezi într-o mapă care va reprezenta Portofoliul tău la Matematică.

Probleme propuse

1. Calculați:

a. $2\sqrt{3}\cdot4\sqrt{5}$; b. $5\sqrt{2}\cdot9\sqrt{7}$; c. $-3\sqrt{6}\cdot10\sqrt{5}$; d. $-11\sqrt{7}\cdot5\sqrt{13}$;
e. $(-12\sqrt{3})\cdot(-5\sqrt{10})$; f. $6\sqrt{14}\cdot(-5\sqrt{3})$; g. $(-\sqrt{15})\cdot(-9\sqrt{7})$; h. $10\sqrt{11}\cdot(-8\sqrt{2})$.

2. Efectuați următoarele înmulțiri:

a. $4\sqrt{6}\cdot3\sqrt{3}$; b. $(-2\sqrt{15})\cdot5\sqrt{5}$; c. $10\sqrt{18}\cdot(-2\sqrt{10})$; d. $\sqrt{20}\cdot(-6\sqrt{12})$;
e. $(-5\sqrt{32})\cdot(-3\sqrt{18})$; f. $(-\sqrt{72})\cdot(-2\sqrt{96})$; g. $(-8\sqrt{24})\cdot\sqrt{125}$; h. $5\sqrt{28}\cdot(-\sqrt{112})$.

3. Efectuați următoarele împărțiri:

a. $\sqrt{12}:\sqrt{2}$; b. $\sqrt{45}:\sqrt{3}$; c. $-\sqrt{18}:\sqrt{6}$; d. $\sqrt{28}:(-\sqrt{14})$;
e. $(12\sqrt{6}):(-3\sqrt{2})$; f. $(-15\sqrt{45}):(-5\sqrt{3})$; g. $(-9\sqrt{84})\cdot(3\sqrt{14})$; h. $(8\sqrt{54}):\sqrt{48}$.

4. Calculați:

a. $\dfrac{1}{2}\sqrt{6}\cdot\dfrac{3}{5}\sqrt{2}$; b. $\left(-\dfrac{7}{12}\right)\sqrt{10}\cdot\dfrac{5}{14}\sqrt{6}$; c. $1{,}5\sqrt{28}\cdot0{,}(6)\sqrt{35}$; d. $\dfrac{4}{9}\sqrt{\dfrac{5}{6}}\cdot\dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$;

e. $-\sqrt{45}:\dfrac{3}{\sqrt{125}}$; f. $\left(-\dfrac{6}{25}\sqrt{20}\right):(2{,}5\sqrt{45})$; g. $\dfrac{11\sqrt{6}}{24}:(-\sqrt{363})$; h. $\sqrt{252}:\dfrac{12}{10\sqrt{14}}$.

5. Calculați, în fiecare caz, $a\cdot b$ și $a:b$, unde:

a. $a=2\sqrt{3}+4\sqrt{3},\ b=\sqrt{3}+\sqrt{12}$; b. $a=\sqrt{56}+\sqrt{126},\ b=4\sqrt{28}-\sqrt{63}$;

c. $a=\sqrt{640}-\sqrt{40},\ b=3\sqrt{45}-\sqrt{180}$; d. $a=3\sqrt{60}+7\sqrt{15}-\sqrt{135},\ b=\sqrt{108}-\sqrt{48}$.

6. „Aria unui dreptunghi ce are lățimea egală cu $4\sqrt{2}$ cm și lungimea de trei ori mai mare este egală cu ... .” Completați spațiul liber pentru a obține o propoziție adevărată.

7. Arătați, efectuând calculele, că $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$, unde:

a. $a=\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{32}+\sqrt{18},\ b=\sqrt{216}+\sqrt{24}-\sqrt{96},\ c=\sqrt{90}+2\sqrt{24}-3\sqrt{10}-\sqrt{54}$;

b. $a=\sqrt{56}+\sqrt{126}+4\sqrt{350},\ b=8\sqrt{160}-2\sqrt{10}+\sqrt{90},\ c=\sqrt{810}-\sqrt{360}-2\sqrt{90}$.

8. Calculați:

a. $\sqrt{3}\cdot(\sqrt{15}-\sqrt{6})$; b. $3\sqrt{5}\cdot(\sqrt{10}+\sqrt{5}-2)$; c. $-\sqrt{24}\cdot(-8\sqrt{3}+\sqrt{150}-3\sqrt{200})$;

d. $(\sqrt{75}-\sqrt{60}+4\sqrt{54}):\sqrt{3}$; e. $(\sqrt{48}-2\sqrt{135}):\sqrt{12}$; f. $2\sqrt{1782}:(\sqrt{792}-\sqrt{550})$.

9. Calculați raportul $\dfrac{x\cdot y}{z}$, unde:

a. $x=3\sqrt{56}-\sqrt{350}+2\sqrt{126}-\sqrt{224},\ y=5\sqrt{8}-2\sqrt{32}+4\sqrt{18}+3\sqrt{128},\ z=3\sqrt{63}+2\sqrt{28}-\sqrt{700}+\sqrt{175}$;

b. $x=2\sqrt{10}+2\sqrt{40}-\sqrt{250}+\sqrt{90},\ y=3\sqrt{245}-\sqrt{80}-\sqrt{500}+3\sqrt{45},\ z=\sqrt{200}+\sqrt{162}-\sqrt{242}+\sqrt{98}$.

10. Efectuați calculele:

a. $\sqrt{5}\cdot(2-\sqrt{3}+3\sqrt{6})+\sqrt{15}$; b. $(4\sqrt{5}+5\sqrt{8}-\sqrt{75})\cdot(3\sqrt{10})$;

c. $(24\sqrt{24}-\sqrt{192}+2\sqrt{80}):8-(\sqrt{5}-\sqrt{3})$; d. $(3\sqrt{120}+\sqrt{960}-\sqrt{420}):(2\sqrt{15})$.

11. Scrieți inversul fiecărui număr:

a. 4; b. -6; c. $\dfrac{3}{5}$; d. $-0{,}3$; e. $\sqrt{7}$; f. $-2\sqrt{3}$; g. $-\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

12. Determinați x din egalitățile următoare:

a. $\dfrac{x}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$; b. $\dfrac{\sqrt{15}}{x}=\dfrac{\sqrt{5}}{4\sqrt{6}}$; c. $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{5}}=\dfrac{3x}{\sqrt{60}}$; d. $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{50}}=\dfrac{\sqrt{189}}{\sqrt{2}x}$.

13. Determinați x, astfel încât egalitățile următoare să fie adevărate:

a. $x\cdot\sqrt{3}=\sqrt{12}$; b. $(3\sqrt{5})\cdot x=\sqrt{135}$; c. $x:(-\sqrt{24})=\sqrt{54}$; d. $\sqrt{4{,}41}:x=0{,}7$.

Joc

Pătratul magic

Completați pătratul alăturat, știind că produsul elementelor de pe linii, coloane și diagonale este același.

$8\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
2		

Autoevaluare

1. Calculați:

a. $3\sqrt{2}\cdot2\sqrt{7}$; b. $\sqrt{3}\cdot10\sqrt{5}$; c. $(12\sqrt{15}):(4\sqrt{5})$. (3p)

2. Alegeți varianta corectă. Aria unui dreptunghi ce are lungimea egală cu $6\sqrt{5}$ cm și lățimea de două ori mai mică este:

a. $30\ \text{cm}^2$; b. $60\ \text{cm}^2$; c. $90\ \text{cm}^2$; d. $120\ \text{cm}^2$. (3p)

3. Efectuați calculele:

a. $\sqrt{5}\cdot(\sqrt{10}+\sqrt{15})$; b. $2\sqrt{6}\cdot(3\sqrt{2}+\sqrt{30}-4)$; c. $(25\sqrt{20}+\sqrt{600}-3\sqrt{250}):(5\sqrt{2})$. (3p)

Notă. Se alocă 1 punct pentru fiecare subpunct rezolvat corect. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Recapitulare și evaluare

Mulțimea numerelor reale • Opusul unui număr real • Modulul unui număr real • Compararea și ordonarea numerelor reale • Reguli de calcul cu radicali • Operații cu numere reale

Pentru exercițiile 1-8, notați în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect. Pentru exercițiile 9-14, scrieți rezolvările complete.

1. Rădăcina pătrată a lui 25 este:

a. 25; **b.** 5; **c.** $-\sqrt{5}$; **d.** $\sqrt{5}$.

2. Opusul numărului real $\sqrt{7}$ este:

a. $-\sqrt{7}$; **b.** $\sqrt{7}$; **c.** 7; **d.** -7.

3. Dintre următoarele numere, este irațional:

a. $-0,(7)$; **b.** -4; **c.** $\sqrt{8}$; **d.** $\frac{4}{9}$.

4. Numărul mai mic decât $\sqrt{6}$ este:

a. 6; **b.** $\sqrt{3}$; **c.** $\sqrt{8}$; **d.** 3.

5. Rezultatul calculului $\sqrt{6}\cdot\sqrt{7}$ este:

a. $\sqrt{13}$; **b.** $\sqrt{42}$; **c.** $6\sqrt{7}$; **d.** $7\sqrt{6}$.

6. Rezultatul calculului $\sqrt{45}:\sqrt{5}$ este:

a. $\sqrt{40}$; **b.** $\sqrt{3}$; **c.** 9; **d.** 3.

7. $\sqrt{54}$ este egal cu:

a. $6\sqrt{3}$; **b.** $2\sqrt{6}$; **c.** $3\sqrt{6}$; **d.** $18\sqrt{3}$.

8. Numărul $\sqrt{10}$ este situat între:

a. 1 și 2; **b.** 2 și 3; **c.** 3 și 4; **d.** 4 și 5.

9. Precizați care dintre enunțurile de mai jos este adevărat (**A**) și care este fals (**F**):

a. $-2\sqrt{3}=\sqrt{12}$;

b. Modulul lui 0 este 0;

c. $\sqrt{0,81}=0,9$.

10. Determinați cel mai mare număr natural mai mic decât $\sqrt{60}$.

11. Asociați fiecărei expresii din coloana **A** răspunsul corect din coloana **B**:

A	B
$\sqrt{3^2+4^2}$	**a.** 7
$\sqrt{3^2\cdot4^2}$	**b.** 12
$\sqrt{3^2}+\sqrt{4^2}$	**c.** 14
	d. 5

12. Determinați numerele a și b din tabelul următor:

Deîmpărțit	Împărțitor	Cât
$-6\sqrt{48}$	$-2\sqrt{3}$	a
$32\sqrt{5}$	b	$\sqrt{20}$

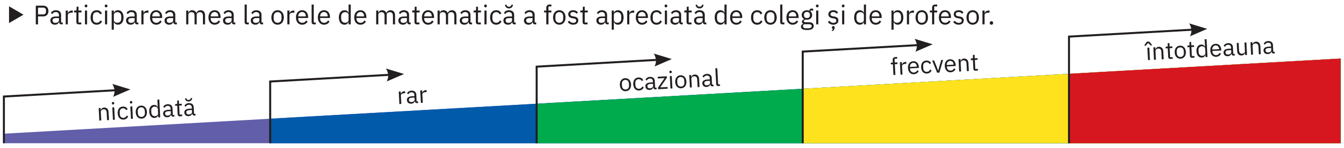
13. Calculați: $\sqrt{14+7\sqrt{25}}-\sqrt{26^2-24^2}+5\sqrt{0,04}$.

14. Calculați: $\sqrt{5}\cdot(2-\sqrt{6})+\sqrt{15}\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{3})$.

Fișa de observare sistematică

▶ Am fost preocupat să aflu lucruri noi despre metodele de rezolvare a problemelor.

▶ Participarea mea la orele de matematică a fost apreciată de colegi și de profesor.



1.6

Lecția 6: Puterea cu exponent întreg a unui număr real. Ordinea efectuării operațiilor cu numere reale

Cuvinte-cheie

putere cu exponent natural | bază | reguli de calcul cu puteri | putere cu exponent întreg | exponent

Puterea cu exponent întreg a unui număr real

Mate practică

Un teren are forma unui pătrat cu latura egală cu $2\sqrt{5}$ dam (ca în Figura 1).

a. Câți dam^2 are suprafața terenului?

b. Câți dam^2 are suprafața un teren cu lungimea laturii de 3 ori mai mare?

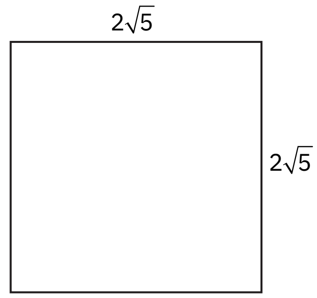


Figura 1

Răspuns:

a. Aria terenului este: $(2\sqrt{5})^2 = 2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5} = 4\cdot\sqrt{25} = 4\cdot 5 = 20$ (dam^2).

b. Al doilea teren are latura: $l = 3\cdot 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$ dam.

Calculând aria, obținem: $\mathcal{A}_{teren} = l^2 = (6\sqrt{5})^2 = 6\sqrt{5}\cdot 6\sqrt{5} = 36\cdot 5 = 180$ (dam^2).

Ce observăm?

Efectuând calculele, rezultă că $(2\sqrt{5})^2 = 2^2\cdot(\sqrt{5})^2$, iar $(6\sqrt{5})^2 = 6^2\cdot(\sqrt{5})^2$.

De reținut

Fie a un număr real și n un număr natural, $n \geq 2$. Produsul a n factori egali cu a se numește *puterea* a n-a a numărului real a și se notează a^n:

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}.$$

Prin convenție, $a^1 = a$ și $a^0 = 1$, pentru orice număr real nenul a. 0^0 nu se definește (nu are sens).

Dacă $a \neq 0$ este un număr real și n este număr natural, atunci, prin definiție, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

În scrierea a^p, unde $p \in \mathbb{Z}$, a se numește *baza* puterii, iar p se numește *exponentul* puterii.

Exemple

1. $(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2\cdot 2\cdot 2} = 2\sqrt{2}$;

2. $(-4\sqrt{2})^2 = (-4\sqrt{2})\cdot(-4\sqrt{2}) = 16\sqrt{4} = 16\cdot 2 = 32$;

3. $\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 1$;

4. $\left(-\sqrt{\dfrac{3}{7}}\right)^2 = \left(-\sqrt{\dfrac{3}{7}}\right)\cdot\left(-\sqrt{\dfrac{3}{7}}\right) = \sqrt{\left(\dfrac{3}{7}\right)^2} = \dfrac{3}{7}$;

5. $(\sqrt{2})^{-2} = \dfrac{1}{(\sqrt{2})^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$;

6. $(-\sqrt{3})^{-3} = \dfrac{1}{(-\sqrt{3})^3} = \dfrac{1}{(-\sqrt{3})\cdot(-\sqrt{3})\cdot(-\sqrt{3})} = -\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

Observație

Pentru a ridica un număr real de forma $a\sqrt{b}$ ($a \neq 0$, $b > 0$) la o putere număr natural, ridicăm la puterea respectivă atât factorul din fața radicalului, cât și numărul de sub radical, apoi înmulțim rezultatele.

Exemple

a. $(2\sqrt{5})^3 = 2^3\sqrt{5^3} = 8\cdot 5\sqrt{5} = 40\sqrt{5}$;

b. $\left(-\dfrac{2}{3}\sqrt{6}\right)^4 = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^4\sqrt{6^4} = \dfrac{16}{81}\cdot 36 = \dfrac{64}{9}$.

Reguli de calcul cu puteri

Regulile de calcul cu puterile care au baza un număr rațional și exponentul număr natural se transferă la puterile în care baza este număr real, dând naștere unor reguli similare. În cele ce urmează, vom considera că x și y sunt numere reale nenule, iar m și n sunt numere întregi.

De reținut

1. Înmulțirea puterilor cu aceeași bază

Pentru a înmulți două puteri cu aceeași bază, se păstrează baza și se adună exponenții:

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}.$$

Exemple: **a.** $(\sqrt{2})^3 \cdot (\sqrt{2})^5 = (\sqrt{2})^{3+5} = (\sqrt{2})^8$; **b.** $(\sqrt{3})^4 \cdot (\sqrt{3})^{-7} = (\sqrt{3})^{4+(-7)} = (\sqrt{3})^{-3} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

2. Împărțirea puterilor cu aceeași bază

Pentru a împărți două puteri cu aceeași bază, se păstrează baza și se scad exponenții:

$$x^m : x^n = x^{m-n}.$$

Exemple: **a.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{14} : \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^9 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{14-9} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5$; **b.** $(\sqrt{7})^8 : (\sqrt{7})^7 = (\sqrt{7})^{8-7} = (\sqrt{7})^1 = \sqrt{7}$.

3. Puterea unei puteri

Pentru a ridica o putere la o altă putere, se păstrează baza și se înmulțesc exponenții:

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}.$$

Exemple: **a.** $\left[(\sqrt{3})^5\right]^3 = (\sqrt{3})^{5\cdot 3} = (\sqrt{3})^{15}$; **b.** $\left[\left(\sqrt{\frac{7}{5}}\right)^{-99}\right]^0 = \left(\sqrt{\frac{7}{5}}\right)^{(-99)\cdot 0} = \left(\sqrt{\frac{7}{5}}\right)^0 = 1$.

4. Puterea unui produs. Produsul a două puteri cu același exponent

Pentru a ridica un produs la o putere, se distribuie exponentul fiecărui factor al produsului:

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n.$$

Pentru a înmulți două puteri cu același exponent, se înmulțesc bazele și se păstrează exponentul:

$$x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n.$$

Exemple: **a.** $(2 \cdot \sqrt{3})^4 = 2^4 \cdot (\sqrt{3})^4 = 16 \cdot 9 = 144$; **b.** $(\sqrt{5})^7 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^7 = \left(\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^7 = 1^7 = 1$.

5. Puterea unui cât. Câtul a două puteri cu același exponent

Pentru a ridica un cât la o putere, se distribuie exponentul fiecărui factor al câtului:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}.$$

Pentru a împărți două puteri cu același exponent, se împart bazele și se păstrează exponentul:

$$\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n.$$

Exemple: **a.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{(\sqrt{2})^3}{2^3} = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$; **b.** $\frac{(\sqrt{3})^5}{(\sqrt{12})^5} = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\right)^5 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.

Ordinea efectuării operațiilor cu numere reale

Situație-problemă

În Figura 2, *ABCD* este dreptunghi, iar *DEFG* este pătrat.
Cât este aria suprafeței hașurate?

Răspuns:

Aria suprafeței hașurate este diferența ariilor dreptunghiului *ABCD* și a pătratului *DEFG*: $\mathcal{A}_{\text{hașurată}} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{DEFG}$.

$\mathcal{A}_{ABCD} = L \cdot l = 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 6 \cdot 5 = 30$.

$\mathcal{A}_{DEFG} = l^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$. Rezultă că $\mathcal{A}_{\text{hașurată}} = 30 - 5 = 25$.

Calculul ariei se poate face rapid astfel:

$$\mathcal{A}_{\text{hașurată}} = 2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 30 - 5 = 25.$$

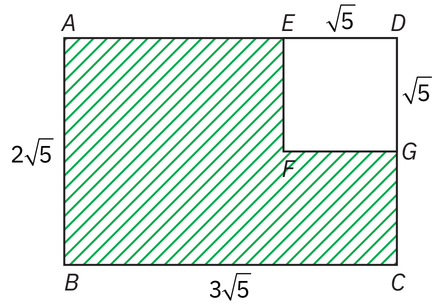


Figura 2

Ce observăm?

Ordinea efectuării operațiilor cu numere reale este aceeași ca în cazul numerelor raționale.

De reținut

Într-un exercițiu de calcul ce conține operații cu numere reale, acestea se efectuează astfel:

- mai întâi ridicările la putere (operații de ordinul al III-lea);
- apoi înmulțirile și împărțirile, în ordinea în care sunt scrise (operații de ordinul al II-lea);
- apoi adunările și scăderile, în ordinea în care sunt scrise (operații de ordinul I).

Dacă în exercițiu apar paranteze, mai întâi se efectuează calculele din parantezele mici (rotunde), apoi calculele din parantezele mari (drepte), urmate de calculele din acolade.

Exemple

1. $\sqrt{24}+\sqrt{12}:\sqrt{2}=2\sqrt{6}+\sqrt{6}=3\sqrt{6}$;
2. $\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{20}\right)^0-(\sqrt{5})^5\cdot(\sqrt{5})^3:(\sqrt{5})^7+\sqrt{5}=1-(\sqrt{5})^{5+3-7}+\sqrt{5}=1-\cancel{\sqrt{5}}+\cancel{\sqrt{5}}=1$;
3. $\sqrt{2}(\sqrt{3}-4)-\sqrt{3}(2\sqrt{6}+\sqrt{2})=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}\cdot 4-\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{6}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\cancel{\sqrt{6}}-4\sqrt{2}-6\sqrt{2}-\cancel{\sqrt{6}}=-10\sqrt{2}$.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Scrieți sub forma unei puteri cu exponent număr întreg:

a. $(-2)^4\cdot 8^3\cdot(-32)^6$; b. $(\sqrt{2})^2\cdot(-\sqrt{8})^5\cdot(\sqrt{128})^7$; c. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^{-5}\cdot(\sqrt{3})^{-9}$.

Rezolvare:

a. $(-2)^4\cdot 8^3\cdot(-32)^6=2^4\cdot(2^3)^3\cdot(2^5)^6=2^4\cdot 2^9\cdot 2^{30}=2^{4+9+30}=2^{43}$.

b. $(\sqrt{2})^2\cdot(-\sqrt{8})^5\cdot(\sqrt{128})^7=(\sqrt{2})^2\cdot\left[(-\sqrt{2})^3\right]^5\cdot\left[(\sqrt{2})^7\right]^7=(\sqrt{2})^2\cdot(-\sqrt{2})^{15}\cdot(\sqrt{2})^{49}=-(\sqrt{2})^{66}=-2^{33}$.

c. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^{-5}\cdot(\sqrt{3})^{-9}=\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^5\cdot\frac{1}{(\sqrt{3})^9}=\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^9\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^9=\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^9=\left(\frac{1}{5}\right)^9$.

2. Calculați:

a. $\sqrt{450}+0,2\cdot\frac{1}{10^{-1}}-3\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}$; b. $(4\sqrt{30}-\sqrt{180}):(-\sqrt{5})+\frac{1}{\left[1,(6)-0,(6)\right]^5}-\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-2}$.

Rezolvare:

a. $\sqrt{450}+0,2\cdot\frac{1}{10^{-1}}-3\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}=15\sqrt{2}+0,2\cdot 10-15\sqrt{2}=2$.

b. $(4\sqrt{30}-\sqrt{180}):(-\sqrt{5})+\frac{1}{\left[1,(6)-0,(6)\right]^5}-\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-2}=(4\sqrt{30}):(-\sqrt{5})-\sqrt{180}:(-\sqrt{5})+\frac{1}{\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\right)^5}-\left(\frac{\sqrt{7}}{1}\right)^2=$

$=-4\sqrt{6}+6+1-7=-4\sqrt{6}$.

3. Inserați paranteze, astfel încât egalitățile următoare să devină corecte:

a. $-3\sqrt{2}-3\sqrt{50}:\sqrt{162}+6=4$; b. $\sqrt{7}+\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{6}:18+3\sqrt{42}=1$.

Rezolvare:

a. $(-3\sqrt{2}-3\sqrt{50}):\sqrt{162}+6=(-3\sqrt{2}-15\sqrt{2}):(9\sqrt{2})+6=(-18\sqrt{2}):(9\sqrt{2})+6=-2+6=4$.

b. $(\sqrt{7}+\sqrt{6})\cdot 3\sqrt{6}:(18+3\sqrt{42})=(\sqrt{7}\cdot 3\sqrt{6}+\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{6}):(18+3\sqrt{42})=(3\sqrt{42}+18):(18+3\sqrt{42})=1$.

Probleme propuse

1. Efectuați:

a. 4^3; b. $(-11)^2$; c. $0,1^3$; d. $(\sqrt{3})^4$; e. $(-2\sqrt{7})^2$; f. 4^{-1}; g. $\sqrt{5}^{-2}$; h. $\left(-\frac{5}{3}\right)^{-3}$.

2. Scrieți sub forma unei puteri cu exponent natural:

a. $(1{,}3)^4 \cdot (1{,}3)^7$; b. $(\sqrt{7})^6 \cdot (\sqrt{7})^9$; c. $(-2\sqrt{3})^4 \cdot (-2\sqrt{3})^7$; d. $(-\sqrt{7})^9 : (-\sqrt{7})^5$;

e. $(4\sqrt{5})^{23} : (4\sqrt{5})^{18}$; f. $\left[(3\sqrt{7})^2\right]^3$; g. $\left[(-0{,}5\sqrt{6})^5\right]^2$; h. $\left\{\left[(\sqrt{7})^4\right]^5\right\}^0$.

3. Efectuați:

a. $\left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{-9}$; b. $\left(-\frac{8}{3}\right)^{14} \cdot \left(-\frac{8}{3}\right)^{-25} \cdot \left(-\frac{8}{3}\right)^9$; c. $(\sqrt{6})^{12} \cdot (\sqrt{6})^{20} : (\sqrt{6})^{34}$;

d. $(6\sqrt{2})^{-3} : (6\sqrt{2})^{-5} : (6\sqrt{2})$; e. $\left[(3\sqrt{5})^2\right]^5 : \left[(3\sqrt{5})^4\right]^3$; f. $(\sqrt{11})^{25} : \left[(\sqrt{11})^{-12}\right]^{-2}$.

4. Scrieți sub forma unei puteri cu exponent natural:

a. $5^{10} \cdot 3^{10}$; b. $(-1{,}5)^9 \cdot (-4)^9$; c. $(\sqrt{3})^{15} \cdot (\sqrt{10})^{15}$; d. $(-\sqrt{6})^{20} \cdot (2\sqrt{3})^{20} \cdot (-\sqrt{2})^{20}$;

e. $(4{,}5)^8 : (1{,}5)^8$; f. $(\sqrt{20})^{72} : (\sqrt{5})^{72}$; g. $\left(\frac{2}{7}\right)^{16} : \left(\frac{1}{14}\right)^{16}$; h. $(\sqrt{180})^{54} : (2\sqrt{5})^{54} \cdot (-3)^{54}$.

5. Scrieți ca putere cu exponentul 2 următoarele numere:

a. $\frac{4}{25}$; b. 5^8; c. $0{,}01$; d. 6^{-2}; e. 5; f. $\frac{1}{2}$; g. $\frac{7}{4}$.

6. Efectuați:

a. $(-4)^2 + 2 \cdot (-3)$; b. $-36 : (-3)^2 - 8 : 2$; c. $5^2 : (-5)^2 + (-2) \cdot (-4)$; d. $64 : (-2)^5 \cdot (-2)$;

e. $\frac{1}{2} : 0{,}5^2 + 1{,}(3) \cdot (-6)$; f. $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-6\sqrt{2}) + \sqrt{6}$; g. $3\sqrt{3} : (\sqrt{3})^3 + (-\sqrt{15})^0$; h. $\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2} : \frac{1}{\sqrt{27}^{-1}}$.

7. Efectuați:

a. $\sqrt{5}(6+\sqrt{30}) - \sqrt{2}(\sqrt{75}+\sqrt{10})$; b. $(\sqrt{90}+\sqrt{30}) : \sqrt{6} - \sqrt{2}(3\sqrt{10}-\sqrt{120}) - \sqrt{375}$;

c. $(5\sqrt{108} - 2\sqrt{1200}) : \left(\frac{1}{\sqrt{5}} : \sqrt{2}\right)^{-2}$; d. $\left(\sqrt{3^2+4^2} : \frac{1}{\sqrt{5}} - 2^{-2} \cdot \sqrt{80}\right) \cdot \frac{\sqrt{5}}{4}$.

8. Calculați:

a. $\sqrt{294} \cdot \left[\sqrt{384} - 4\sqrt{2} \cdot (2\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} + 6\sqrt{3}) : 2\right]$;

b. $\left\{\left[3\sqrt{375} - \sqrt{3^3} \cdot (\sqrt{180} - \sqrt{80})\right] : 3\right\} \cdot 3\sqrt{15}$;

c. $2\sqrt{20} \cdot \left\{3\sqrt{120} - \left[5\sqrt{224} - \sqrt{8} \cdot (\sqrt{112} + \sqrt{252})\right] : 0{,}25^{-1} \cdot 4^{-1}\right\}$;

d. $\left\{2\sqrt{96} \cdot (\sqrt{2})^{-2} - \left[\sqrt{192} \cdot (\sqrt{98} - \sqrt{128}) - 2\sqrt{486}\right]\right\} \cdot \sqrt{72}$.

9. Calculați:

a. $6 \cdot (\sqrt{567} - 2\sqrt{28} - \sqrt{112})^2 + (4\sqrt{108})^2 : (3\sqrt{27} - \sqrt{363} + \sqrt{48})^2$;

b. $\sqrt{63} \cdot (\sqrt{252} + \sqrt{7} - 2\sqrt{63})^3 + (3\sqrt{11} - \sqrt{396} + \sqrt{44})^3 : (-\sqrt{11})$;

c. $(\sqrt{180} + \sqrt{125} - \sqrt{720})^2 \cdot (-\sqrt{6}) - \sqrt{2} \cdot (2\sqrt{12} - \sqrt{3} - \sqrt{480} : \sqrt{10})^3$;

d. $-6\sqrt{216} : (\sqrt{72} - 5\sqrt{8} + \sqrt{50})^3 - 5\sqrt{540} : (2\sqrt{45} - \sqrt{80} + \sqrt{320})$.

10. Calculați:

a. $-3\frac{1}{8} \cdot \left[-0{,}2 \cdot \sqrt{3} + \frac{7\sqrt{3}}{15} \cdot \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{5}\right)\right] : \sqrt{3}$; b. $\left[5\sqrt{2} - 2{,}(6) \cdot \sqrt{2}\right] : \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0{,}(3) + 0{,}25 \cdot \frac{8\sqrt{2}}{9}\right] \cdot 0{,}75$.

11. Arătați că numărul $a = \left[\left(\sqrt{8} + \frac{\sqrt{2}}{5} - \frac{\sqrt{18}}{2}\right) - \left(\frac{3\sqrt{8}}{\sqrt{16}} + \frac{2\sqrt{18}}{3}\right)\right] : \sqrt{\frac{2}{25}}$ este întreg.

12. Suma dintre pătratul lui -6 și cubul lui 2 se înmulțește cu $-4\sqrt{2}$. Din rezultat se scade suma dintre $-\sqrt{72}$ și cubul lui $-3\sqrt{2}$. Noul rezultat se împarte la 4.
Scrieți o relație care să ilustreze enunțul problemei, apoi precizați rezultatul final.

13. Inserați paranteze, astfel încât egalitățile următoare să devină corecte:

a. $-3^2\sqrt{2}+\sqrt{2}:4\sqrt{8}-5\sqrt{3}+2\sqrt{27}:\sqrt{363}=-2$; **b.** $\sqrt{5}^4-2\cdot\sqrt{2}^2:7+(2\sqrt{5})^2-4^2:7=1$.

14. Se consideră numărul real $x=\sqrt{11}^3-\sqrt{20}\cdot\sqrt{55}$.

a. Demonstrați că $\sqrt{11}\simeq 3{,}31$.

b. Utilizând eventual calculatorul de buzunar, determinați valoarea aproximativă a numărului x, folosind aproximările prin lipsă la ordinul sutimilor ale tuturor radicalilor din fiecare dintre scrierile sale următoare:

A. $x=\sqrt{1331}-\sqrt{1100}$; **B.** $x=\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}-\sqrt{20}\cdot\sqrt{55}$;

C. $x=\sqrt{1331}-\sqrt{20}\cdot\sqrt{55}$; **D.** $x=\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}-\sqrt{1100}$.

15. Asociați fiecăruia dintre numerele reale din prima linie mulțimea din care face parte, aflată în cea de-a doua linie:

$a=(-\sqrt{6})\cdot(-\sqrt{6})^5:(-\sqrt{6})^3\cdot(-\sqrt{6})^7$; $b=\left(\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{3}+|3\sqrt{2}-4|:(2\sqrt{2})\right)^2$; $c=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3^2}+\sqrt{3^3}-\sqrt{3^4}}{\sqrt{12}}$

A. $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; **B.** $\mathbb{N}$; **C.** $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$; **D.** $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$.

16. Determinați cel mai mare număr întreg mai mic sau egal decât numărul real x, în fiecare dintre cazurile:

a. $x=\left[\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot(\sqrt{6}-1)\right]\cdot(\sqrt{3})^{-1}$;

b. $x=(2\sqrt{45}-3\sqrt{20})^{15}-\dfrac{11\sqrt{18}-9\sqrt{50}}{\sqrt{6}}$;

c. $x=\left[(\sqrt{6})^3:(-\sqrt{6})^7\right]:(\sqrt{6})^{-5}+3$

Minitest

1. Calculați:

a. $(\sqrt{3})^5\cdot(\sqrt{3})^{12}:\left[(\sqrt{3})^3\right]^5$; **b.** $(\sqrt{8})^{35}:(\sqrt{2})^{35}\cdot(1{,}5)^{35}$; **c.** $3^{-2}+(\sqrt{3})^{-2}+\left(\dfrac{9}{5}\right)^{-1}$. (3p)

2. Alegeți varianta corectă. Rezultatul calculului $(\sqrt{2})^3(\sqrt{2}+\sqrt{3})-(\sqrt{3})^3(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ este:

a. $5-\sqrt{6}$; **b.** 0; **c.** $-5-\sqrt{6}$; **d.** $\sqrt{6}$. (3p)

3. Calculați:

a. $\dfrac{2\sqrt{15}}{7}\cdot\left(-\sqrt{\dfrac{98}{4}}\right)+\sqrt{120}:2$; **b.** $2\sqrt{196}(\sqrt{45}+\sqrt{20}+\sqrt{80}-\sqrt{125})$; **c.** $\left(\sqrt{5^2+12^2}:\dfrac{1}{\sqrt{5}}-4^{-2}\cdot\sqrt{80}\right)\cdot\dfrac{2\sqrt{20}}{51}$. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Lecția 7: Raționalizarea numitorului unei fracții

Cuvinte-cheie

raționalizare amplificare numitor radical

Mate practică

Un teren de formă dreptunghiulară, de arie egală cu $50\ \text{m}^2$, este împărțit în 6 parcele pătrate, de arii egale, ca în Figura 1.

a. Ce lungime are latura unei parcele?

b. Câți metri de sârmă sunt necesari pentru a împrejmui terenul?

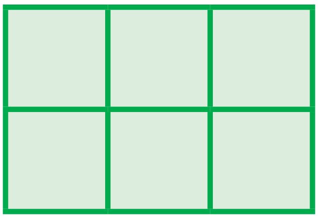


Figura 1

Răspuns:

a. Aria unei parcele este $\frac{50}{6}=\frac{25}{3}\ \text{m}^2$. Notând cu a lungimea laturii unei parcele, rezultă $a^2=\frac{25}{3}$, de unde $a=\sqrt{\frac{25}{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}$ metri.

b. Pentru a determina câți metri de sârmă trebuie cumpărați, calculăm perimetrul terenului. Lungimea terenului este egală cu $L=3\cdot\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{15}{\sqrt{3}}$ metri, iar lățimea $l=2\cdot\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{10}{\sqrt{3}}$ metri. În consecință:

$$P_{teren}=2\cdot(L+l)=2\cdot\left(\frac{15}{\sqrt{3}}+\frac{10}{\sqrt{3}}\right)=2\cdot\frac{25}{\sqrt{3}}=\frac{50}{\sqrt{3}}\text{ metri.}$$

Observăm că, deși cunoaștem valoarea aproximativă a lui $\sqrt{3}$, și anume $\sqrt{3}=1{,}73\ldots$, este dificil de estimat valoarea perimetrului, fie și cu aproximație, întrucât algoritmul de împărțire, învățat în clasa a V-a la fracții zecimale, presupune ca numărul de zecimale ale împărțitorului să fie finit.

În astfel de situații este util ca numitorul să fie exprimat printr-un număr rațional (chiar natural). O modalitate de a realiza acest lucru este amplificarea cu un număr ales convenabil.

Întrucât $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3$, amplificăm cu $\sqrt{3}$ fracția obținută. Astfel, rezultă: $^{\sqrt{3})}\frac{50}{\sqrt{3}}=\frac{50\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{50\sqrt{3}}{3}$.

În acest caz, putem determina valoarea aproximativă a perimetrului astfel:

$$P_{teren}=\frac{50\sqrt{3}}{3}\simeq\frac{50\cdot 1{,}73\ldots}{3}\simeq\frac{86{,}5\ldots}{3}\simeq 28{,}83\ldots.$$

În concluzie, sunt necesari cel puțin 29 de metri de sârmă.

Ce observăm?

Pentru a determina valoarea aproximativă a unui număr real exprimat printr-o fracție al cărei numitor este un radical, este indicată amplificarea fracției astfel încât numitorul să devină număr rațional.

În exemplul dat, numitorul fracției $\frac{50}{\sqrt{3}}$ devine rațional prin amplificare cu $\sqrt{3}$.

Observație

A raționaliza numitorul unui raport de numere reale, dacă numitorul este irațional, înseamnă a amplifica raportul cu un număr irațional, astfel încât numitorul raportului să devină rațional.

Dacă numitorul unui raport de numere reale este un număr irațional de forma $a\sqrt{b}$, unde a și b sunt numere raționale nenule, iar $b>0$, pentru raționalizarea numitorului se poate amplifica raportul cu $\sqrt{b}$. În acest caz, avem: $^{\sqrt{b})}\frac{x}{a\sqrt{b}}=\frac{x\cdot\sqrt{b}}{a\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}=\frac{x\sqrt{b}}{ab}$.

1.7

Exemple

1. ${}^{\sqrt{2})}\dfrac{7}{\sqrt{2}}=\dfrac{7\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$;

2. $-{}^{\sqrt{3})}\dfrac{6}{5\sqrt{3}}=-\dfrac{6\sqrt{3}}{5\cdot(\sqrt{3})^2}=-\dfrac{6\sqrt{3}}{5\cdot 3}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$;

3. $\dfrac{9}{\sqrt{20}}={}^{\sqrt{5})}\dfrac{9}{2\sqrt{5}}=\dfrac{9\sqrt{5}}{2\cdot(\sqrt{5})^2}=\dfrac{9\sqrt{5}}{2\cdot 5}=\dfrac{9\sqrt{5}}{10}$;

4. ${}^{\sqrt{11})}\dfrac{4\sqrt{7}}{3\sqrt{11}}=\dfrac{4\sqrt{7}\cdot\sqrt{11}}{3\cdot(\sqrt{11})^2}=\dfrac{4\sqrt{77}}{3\cdot 11}=\dfrac{4\sqrt{77}}{33}$.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Arătați că următoarele numere sunt raționale:

a. $\sqrt{3}-\dfrac{3}{\sqrt{3}}$; **b.** $\dfrac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}-\sqrt{\dfrac{4}{5}}$; **c.** $\dfrac{3}{\sqrt{12}}+\dfrac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{\sqrt{24}}$.

Rezolvare:

a. $\sqrt{3}-{}^{\sqrt{3})}\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\dfrac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}-\sqrt{3}=0$, care este număr rațional.

b. ${}^{\sqrt{5})}\dfrac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}-\sqrt{\dfrac{4}{5}}=\dfrac{\sqrt{5}\cdot(2-\sqrt{5})}{(\sqrt{5})^2}-{}^{\sqrt{5})}\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}-5}{5}-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{2\sqrt{5}-5-2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{-5}{5}=-1$, care este număr rațional.

c. $\dfrac{3}{\sqrt{12}}+\dfrac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{\sqrt{24}}={}^{\sqrt{3})}\dfrac{3}{2\sqrt{3}}+{}^{\sqrt{6})}\dfrac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3}+\dfrac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}-\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{2}}{2\cdot 6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{6-3\sqrt{12}}{12}=$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{6-3\cdot 2\sqrt{3}}{12}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{6\cdot(1-\sqrt{3})}{12}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\cancel{\sqrt{3}}+1-\cancel{\sqrt{3}}}{2}=\dfrac{1}{2}$, care este număr rațional.

2. Calculați:

a. $\dfrac{1}{\sqrt{12}}+\dfrac{1}{\sqrt{27}}+\dfrac{1}{\sqrt{108}}$; **b.** $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{20}{\sqrt{48}}+\dfrac{15}{\sqrt{75}}\right)-\left(\dfrac{28}{3\sqrt{147}}+\dfrac{25}{3\sqrt{75}}\right)$.

Rezolvare:

a. $\dfrac{1}{\sqrt{12}}+\dfrac{1}{\sqrt{27}}+\dfrac{1}{\sqrt{108}}={}^{\sqrt{3})}\dfrac{1}{2\sqrt{3}}+{}^{\sqrt{3})}\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+{}^{\sqrt{3})}\dfrac{1}{6\sqrt{3}}={}^{3)}\dfrac{\sqrt{3}}{6}+{}^{2)}\dfrac{\sqrt{3}}{9}+\dfrac{\sqrt{3}}{18}=\dfrac{3\sqrt{3}+2\sqrt{3}+\sqrt{3}}{18}=\dfrac{6\sqrt{3}}{18}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

b. $\left({}^{\sqrt{3})}\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{20}{\sqrt{48}}+\dfrac{15}{\sqrt{75}}\right)-\left(\dfrac{28}{3\sqrt{147}}+\dfrac{25}{3\sqrt{75}}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}+{}^{\sqrt{3})}\dfrac{20}{4\sqrt{3}}+{}^{\sqrt{3})}\dfrac{15}{5\sqrt{3}}\right)-\left({}^{\sqrt{3})}\dfrac{28}{3\cdot 7\sqrt{3}}+{}^{\sqrt{3})}\dfrac{25}{3\cdot 5\sqrt{3}}\right)=$

$=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{20\sqrt{3}}{4\cdot 3}+\dfrac{15\sqrt{3}}{5\cdot 3}\right)-\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{9}+\dfrac{5\sqrt{3}}{9}\right)=\dfrac{\sqrt{3}+5\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{3}-\dfrac{9\sqrt{3}}{9}=\dfrac{9\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

Activitate pe grupe

Fie $x=\dfrac{1-\sqrt{6}}{\sqrt{12}}+\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{18}}{\sqrt{24}}$ și $y=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{8}}{\sqrt{40}}+\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{11}}{\sqrt{88}}+\dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{14}}{\sqrt{154}}$.

Elevii clasei se împart în două grupe, care calculează în mod diferit numerele x și y, astfel:

Elevii din grupa 1: raționalizează fiecare fracție, apoi aduc la același numitor fracțiile obținute și efectuează calculele, scoțând factorii de sub radical și apoi reducând termenii asemenea.

Elevii din grupa 2: scriu fiecare fracție ca diferență a două fracții, simplifică fracțiile obținute, efectuează calculele, reducând termenii asemenea, iar la final raționalizează numitorii.

Comparați cele două metode de calcul și decideți când este mai avantajoasă utilizarea uneia sau alteia dintre acestea.

Probleme propuse

1. Raționalizați numitorul următoarelor fracții:

a. $\frac{5}{\sqrt{2}}$; **b.** $\frac{2}{\sqrt{7}}$; **c.** $-\frac{6}{\sqrt{5}}$; **d.** $-\frac{9}{\sqrt{11}}$; **e.** $\frac{6}{5\sqrt{5}}$; **f.** $\frac{8}{3\sqrt{7}}$; **g.** $\frac{15}{7\sqrt{2}}$; **h.** $-\frac{9}{4\sqrt{5}}$.

2. Raționalizați numitorul următoarelor fracții:

a. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$; **b.** $-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$; **c.** $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$; **d.** $\frac{4\sqrt{3}}{5\sqrt{5}}$; **e.** $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{56}}$; **f.** $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$; **g.** $\frac{5-\sqrt{2}}{3\sqrt{6}}$; **h.** $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{20}}{\sqrt{50}}$.

3. Raționalizați numitorul următoarelor fracții:

a. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$; **b.** $\frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{6}}$; **c.** $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{14}}$; **d.** $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{3}}$;

e. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{96}}$; **f.** $\frac{\sqrt{12}+2}{\sqrt{2}}$; **g.** $\frac{2-\sqrt{5}}{2\sqrt{10}}$; **h.** $\frac{\sqrt{18}+\sqrt{54}}{\sqrt{90}}$.

4. Arătați că următoarele numere sunt raționale:

a. $\sqrt{5}-\frac{5}{\sqrt{5}}$; **b.** $\frac{6}{\sqrt{6}}-\sqrt{6}$; **c.** $\frac{6}{\sqrt{12}}+\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}}$; **d.** $\frac{5}{\sqrt{125}}-\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{180}}$.

5. Efectuați calculele următoare, după raționalizarea numitorilor:

a. $\frac{4}{\sqrt{2}}+\frac{9}{\sqrt{3}}+\frac{15}{5\sqrt{3}}-\frac{4\sqrt{25}}{5\sqrt{2}}$; **b.** $\frac{15}{\sqrt{5}}+\frac{6}{\sqrt{12}}-\frac{8}{\sqrt{20}}-\frac{15}{\sqrt{75}}$;

c. $\frac{16}{\sqrt{8}}+\frac{\sqrt{36}-\sqrt{16}}{\sqrt{2}}-\frac{14}{\sqrt{98}}$; **d.** $\frac{24}{\sqrt{24}}-\frac{25}{\sqrt{150}}-\frac{36}{\sqrt{216}}+\frac{15}{\sqrt{54}}$.

6. Efectuați:

a. $\left(\frac{14}{\sqrt{7}}+\frac{40}{\sqrt{20}}\right)-\left(\frac{35}{\sqrt{5}}-\frac{56}{\sqrt{28}}\right)$; **b.** $\left(\frac{2}{\sqrt{75}}-\sqrt{27}\right)-\left(\sqrt{3}-\frac{30}{2\sqrt{12}}\right)$;

c. $\left(\frac{10}{\sqrt{5}}+2\right)-\left(1+\frac{30}{\sqrt{180}}\right)$; **d.** $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{24}}{3}+\frac{10}{\sqrt{150}}\right)+\left(2{,}5+\frac{12}{\sqrt{6}}\right)$.

7. Efectuați:

a. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{7}{\sqrt{28}}+\frac{21}{2\sqrt{63}}\right):\frac{2\sqrt{7}}{3}$; **b.** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3-\left(\frac{3}{\sqrt{72}}-\frac{4}{\sqrt{48}}\right)$;

c. $2\cdot\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}}+3\cdot\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{3}}+6\cdot\frac{\sqrt{6}+6}{\sqrt{6}}$; **d.** $\left(\frac{\sqrt{96}}{12}+\frac{9}{\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}}\right):\left(\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{12}}+\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$.

8. Calculați:

a. $\left(\sqrt{0,(3)}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right):\frac{1}{\sqrt{3}}+\left(\sqrt{0,(2)}+\sqrt{\frac{80}{90}}\right):\frac{1}{\sqrt{2}}$;

b. $1\frac{5}{7}\cdot\left(\sqrt{0,1(6)}+\frac{5}{2\sqrt{150}}-\frac{15}{\sqrt{54}}\right)+1\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{12}}{2\sqrt{15}}\right)$;

c. $\left(\frac{3\sqrt{7}}{2}-\sqrt{\frac{4}{63}}\right)+\sqrt{2}\cdot\left(\frac{7}{2\sqrt{14}}-\frac{7}{3\sqrt{14}}\right)+\sqrt{3}\cdot\left(\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{2\sqrt{21}}\right)$;

d. $\left(\frac{12+10\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}-\frac{4\sqrt{2}+2}{\sqrt{8}}\right)\cdot\left(\frac{6-2\sqrt{2}}{\sqrt{72}}-\frac{4-2\sqrt{2}}{2\sqrt{8}}\right)$.

9. Arătați că următoarele numere sunt întregi:

a. $\sqrt{3}\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{12}}{3}\right)-\left(\sqrt{48}+\frac{2\sqrt{96}}{\sqrt{50}}\right):\sqrt{3}-\left(\frac{8\sqrt{3}}{5}-\sqrt{3}\right):\frac{1}{\sqrt{27}}$;

b. $\frac{14}{\sqrt{63}}\cdot\left(\frac{6\sqrt{7}}{7}+\frac{18}{\sqrt{7}}-\frac{30}{\sqrt{28}}\right)-\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{15}{\sqrt{50}}+\frac{24}{\sqrt{8}}\right):\sqrt{8}$;

c. $\sqrt{6}\cdot\left(|\sqrt{3}-\sqrt{2}|+|2\sqrt{3}-3\sqrt{2}|\right)-\left(\frac{40}{\sqrt{200}}-\frac{21}{\sqrt{147}}\right):(\sqrt{6})^{-1}$;

d. $10\cdot\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+\ldots+\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{\sqrt{9900}}\right)$.

10. Se consideră numărul real $a=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}:\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{-3}$. Determinați cea mai mică valoare a numărului natural nenul b, astfel încât $\frac{\sqrt{b}}{a}$ să fie un număr întreg.

11. Se consideră numărul real $a=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{18}}-\frac{1}{\sqrt{50}}}\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{27}+\sqrt{12}}\right)^{-1}$. Determinați cea mai mică valoare a numărului natural nenul b, astfel încât $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ să fie un număr rațional mai mare ca 3.

Minitest

1. Raționalizați numitorii următoarelor fracții:

a. $\frac{8}{\sqrt{2}}$; **b.** $\frac{6}{\sqrt{18}}$; **c.** $-\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{5}}$; **d.** $\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{20}}$. (3p)

2. Alegeți varianta corectă. Rezultatul calculului $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\left(\frac{14}{\sqrt{98}}+\sqrt{\frac{25}{162}}\right):\frac{23\sqrt{2}}{36}$ este:

a. $\sqrt{2}$; **b.** $\frac{\sqrt{2}}{23}$; **c.** 1; **d.** $3\sqrt{2}$. (3p)

3. Calculați:

a. $\left(\frac{8}{\sqrt{2}}+\frac{12}{\sqrt{3}}\right)-\left(\frac{60}{3\sqrt{50}}+\frac{9}{\sqrt{27}}\right)$;

b. $\left(\sqrt{0,(2)}+\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt{2}+\left(\frac{10}{\sqrt{45}}+\sqrt{0,(5)}\right)\cdot\sqrt{5}$;

c. $0,5\cdot\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2:\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{6}{\sqrt{54}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Lecția 8: Media aritmetică ponderată a două sau mai multe numere reale. Media geometrică a două numere reale pozitive

Cuvinte-cheie

media aritmetică | media geometrică | pondere | media aritmetică ponderată

Media aritmetică ponderată a două sau mai multe numere reale

Mate practică

Membrii unui club de robotică sunt în faza de testare a robotului echipei lor. Acesta trebuie să sorteze piese de trei culori diferite timp de două minute.

După 30 de teste, aceștia au constatat că la 9 dintre ele, robotul a sortat 16 piese, iar de alte 13 ori câte 14 piese, un rezultat foarte bun.

În celelalte 8 teste, robotul a sortat doar câte 11 piese. Vom calcula media aritmetică a rezultatelor pentru a vedea scorul mediu de până acum:

$$m_a = \frac{\overbrace{(16+16+\ldots+16)}^{9\text{ ori}}+\overbrace{(14+14+\ldots+14)}^{13\text{ ori}}+\overbrace{(11+11+\ldots+11)}^{8\text{ ori}}}{30} = \frac{9\cdot 16+13\cdot 14+8\cdot 11}{30} = \frac{414}{30} = 13{,}8.$$

Ce observăm?

Între cele 30 de rezultate, 16 apare de 9 ori, 14 apare de 13 ori, iar 11 apare de 8 ori. Vom spune că valorile 16, 14 și 11 au ponderile 9, 13 și, respectiv, 8.

În general, dacă într-un anumit set de valori numerice, valorile a, b și c au ponderile m, n, respectiv p, atunci media aritmetică a celor $m + n + p$ valori se numește *media ponderată* a numerelor a, b și c cu ponderile m, n, p și se poate calcula cu formula:

$$m_{ap} = \frac{\overbrace{(a+a+\ldots+a)}^{m\text{ termeni}}+\overbrace{(b+b+\ldots+b)}^{n\text{ termeni}}+\overbrace{(c+c+\ldots+c)}^{p\text{ termeni}}}{m+n+p} = \frac{m\cdot a+n\cdot b+p\cdot c}{m+n+p}.$$

Conceptul de medie ponderată se poate extinde și pentru cazul în care ponderile sunt numere reale pozitive (nu neapărat numere naturale).

De reținut

Fie $n \geq 2$ un număr natural și $p_1, p_2, \ldots, p_n > 0$. Numărul real:

$$m_{ap} = \frac{p_1\cdot a_1 + p_2\cdot a_2 + \ldots + p_n\cdot a_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}.$$

se numește *media aritmetică ponderată* a numerelor reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$, cu ponderile $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Dacă $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$, atunci se obține media aritmetică $m_a = \dfrac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)}{n}$.

Dacă $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$, atunci $a_1 \leq m_{ap} \leq a_n$.

Exemple

1. În Franța, nota unui absolvent de liceu la examenul de bacalaureat din anul 2024 a fost formată dintr-o medie C (controlul continuu) a notelor acestuia din ultimii doi ani la anumite materii (în funcție de profilul clasei sale și de materiile opționale alese), cu ponderea 40, din notele FS și FO obținute în anul anterior la proba scrisă și la cea orală a examenului de limba franceză, fiecare dintre acestea având ponderea 5, și din notele de la examenele finale: la filozofie, nota F cu ponderea 8, la „marele oral" (unde a răspuns dintr-o materie de specialitate aleasă în cursul liceului), nota MO cu ponderea 10, și la două materii de specialitate, S_1 și S_2, fiecare având ponderile 16.

   Notele, în școlile din Franța, sunt de la 0 la 20, iar o medie de cel puțin 16 la examenul de bacalaureat este însoțită de mențiunea „foarte bine".

   Media unui candidat la examenul de bacalaureat din Franța a fost calculată în 2024 după formula:

$$\text{medie bacalaureat} = \frac{C\cdot 40+FS\cdot 5+FO\cdot 5+F\cdot 8+MO\cdot 10+S_1\cdot 16+S_2\cdot 16}{40+5+5+8+10+16+16}.$$

1.8

Jean-Paul a avut media de 16,5 la controlul continuu, a obținut notele 16 și 18 la examenul scris, respectiv la cel oral de limba franceză, 16 la filozofie, 17 la „marele oral” și notele 14 și 18 la materiile de specialitate. Media lui Jean-Paul de la examenul de bacalaureat este:

$$\frac{16{,}5\cdot 40+16\cdot 5+18\cdot 5+16\cdot 8+17\cdot 10+14\cdot 16+18\cdot 16}{40+5+5+8+10+16+16}=\frac{1640}{100}=16{,}4.$$

2. Media aritmetică ponderată a numerelor 4 și –6, cu ponderile 5, respectiv 3, este:

$$m_{ap}=\frac{4\cdot 5+(-6)\cdot 3}{5+3}=\frac{20-18}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}=0{,}25.$$

3. Media aritmetică ponderată a numerelor $2\sqrt{5}$, $8\sqrt{5}$ și $6\sqrt{5}$, cu ponderile 0,5, $\frac{3}{4}$, respectiv $\frac{2}{3}$, este:

$$m_{ap}=\frac{2\sqrt{5}\cdot 0{,}5+8\sqrt{5}\cdot\frac{3}{4}+6\sqrt{5}\cdot\frac{2}{3}}{0{,}5+\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{5}+6\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}=\frac{11\sqrt{5}}{\frac{23}{12}}=11\sqrt{5}\cdot\frac{12}{23}=\frac{132\sqrt{5}}{23}.$$

Media geometrică a două numere reale pozitive

Situație-problemă

Dina are de rezolvat următoarea problemă:

Care este lungimea x a laturii pătratului din mijloc, P, astfel încât raportul dintre latura pătratului mic P_1 și latura pătratului P să fie același cu raportul dintre latura lui P și latura pătratului mare P_2 (Figura 1)?

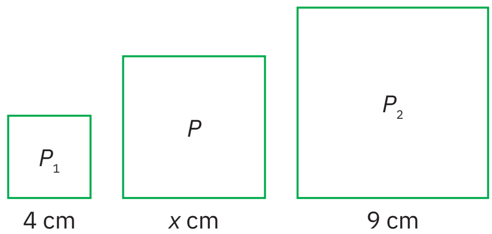


Figura 1

Ce observăm?

Condiția problemei se scrie $\frac{4}{x}=\frac{x}{9}$; altfel spus, x este valoarea comună a mezilor unei proporții în care extremii sunt 4 și 9, iar mezii sunt egali. Obținem $x^2=4\cdot 9=36$, deci $x=\sqrt{36}=6$ cm.

Mai general, putem constata că, dacă $\frac{x}{a}=\frac{b}{x}$ este o proporție cu termeni pozitivi, atunci $x=\sqrt{a\cdot b}$.

De reținut

Media geometrică (sau media proporțională) a numerelor pozitive a și b este egală cu rădăcina pătrată a produsului lor:

$$m_g(a,b)=\sqrt{a\cdot b}.$$

Când nu există pericol de confuzie, media geometrică se poate nota, mai scurt, cu m_g.

Exemple

1. Media geometrică a numerelor 10 și 40 este $m_g=\sqrt{10\cdot 40}=\sqrt{400}=20$.
2. Media geometrică a numerelor $\frac{7}{3}$ și 0,(7) este $m_g=\sqrt{\frac{7}{3}\cdot 0{,}(7)}=\sqrt{\frac{7}{3}\cdot\frac{7}{9}}=\sqrt{\frac{49}{27}}=\frac{^{\sqrt{3})}7}{3\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{9}$.

Observații

1. Media geometrică a două numere pozitive este cuprinsă între cel mai mic și cel mai mare dintre cele două numere:

dacă $0<a\le b$, atunci $a\le\sqrt{a\cdot b}\le b$ (cu egalitate pentru $a=b$).

Exemple:

a. Pentru $a=8$ și $b=18$, avem $m_g=\sqrt{8\cdot 18}=\sqrt{144}=12$ și $a<\sqrt{ab}<b$.

b. Pentru $x=\frac{5}{4}$ și $y=\frac{1}{5}$, avem $m_g=\sqrt{\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ și $x>\sqrt{xy}>y$.

c. Pentru $p=\sqrt{3}$ și $q=\sqrt{3}$, avem $m_g=\sqrt{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ și $p=\sqrt{pq}=q$.

2. Media geometrică a două numere reale pozitive este mai mică sau egală cu media aritmetică a celor două numere:

$$\sqrt{a \cdot b} \le \frac{a+b}{2}, \text{ pentru orice } a, b > 0.$$

Această relație, în care egalitatea are loc dacă $a = b$, se numește *inegalitatea mediilor*.

Exemple: a. Media geometrică a numerelor 27 și 75 este $m_g = \sqrt{27 \cdot 75} = \sqrt{2025} = 45$, iar media aritmetică este $m_a = \frac{27+75}{2} = 51$. Evident, $m_g < m_a$.

b. Media geometrică a numerelor 6 și 8 este $m_g = \sqrt{6 \cdot 8} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$, iar media lor aritmetică este $m_a = 7$. Se verifică relația $4\sqrt{3} < 7$ (deoarece $4\sqrt{3} = \sqrt{48} < \sqrt{49} = 7$).

Cultură matematică

Media geometrică în practică. Raportul de aspect

Raportul de aspect (în engleză *aspect ratio*) al unui ecran reprezintă raportul dintre dimensiunile acestuia, mai precis dintre lățime și înălțime. De-a lungul anilor, au fost utilizate mai multe tipuri de formate (formatul TV 4:3, formatul CinemaScope 2,35:1 etc.). În prezent, se utilizează în mod obișnuit ecranul lat (widescreen), al cărui format este 16:9.

Căutați pe internet pentru a afla cum a fost utilizată media geometrică de către inginerul american Kerns Powers pentru alegerea acestui format.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Media aritmetică a trei numere reale este egală cu $\sqrt{80}$. Dacă două dintre numere sunt egale cu $\sqrt{20}$, respectiv $\sqrt{245}$, determinați cel de-al treilea număr.

Rezolvare:

Notăm numărul necunoscut cu x. Media aritmetică a celor trei numere este: $\frac{\sqrt{20}+\sqrt{245}+x}{3} = \sqrt{80}$.

Scoatem factorii de sub radical și obținem: $\frac{2\sqrt{5}+7\sqrt{5}+x}{3} = 4\sqrt{5}$.

Mai departe, $9\sqrt{5}+x = 3 \cdot 4\sqrt{5}$, adică $9\sqrt{5}+x = 12\sqrt{5}$. Obținem $x = 12\sqrt{5} - 9\sqrt{5}$, adică $x = 3\sqrt{5}$.

2. Determinați x știind că media aritmetică ponderată a numerelor $\frac{2}{3}$, 5^{-1} și x, cu ponderile 6, 5, respectiv 4, este egală cu 1,4.

Rezolvare:

Media aritmetică ponderată a celor trei numere este: $\dfrac{\frac{2}{3} \cdot 6 + 5^{-1} \cdot 5 + x \cdot 4}{6+5+4} = 1{,}4$.

Efectuând calculele, obținem $\frac{4+1+4x}{15} = 1{,}4$, de unde rezultă $5+4x = 15 \cdot 1{,}4$, adică $5+4x = 21$.

Rezultă că $4x = 16$, ceea ce înseamnă că $x = 4$.

3. Determinați numerele naturale x și y dacă se știe că media geometrică a numerelor 2^x și 5^y este egală cu 20.

Rezolvare:

Media geometrică a numerelor 2^x și 5^y este $\sqrt{2^x \cdot 5^y} = 20$. Aceasta înseamnă că $2^x \cdot 5^y = 20^2$, adică $2^x \cdot 5^y = 2^4 \cdot 5^2$. Cum x și y sunt numere naturale, rezultă că $x = 4$ și $y = 2$.

Probleme propuse

1. Calculați media aritmetică și media geometrică a următoarelor numere:

a. 4 și 8; b. $\frac{2}{3}$ și $\frac{7}{3}$; c. $\frac{4}{5}$ și $\frac{5}{4}$; d. 3,6 și 6,4;

e. 0,16 și 4; f. $\sqrt{5}$ și $\sqrt{45}$; g. $\sqrt{18}$ și $\sqrt{50}$; h. $\frac{3}{\sqrt{3}}$ și $\frac{\sqrt{108}}{2}$.

2. Calculați media aritmetică ponderată a numerelor:
   a. 4 și 6, cu ponderile 2, respectiv 8;
   b. 5, 6 și 12, cu ponderile 3, 5, respectiv 2;
   c. −10 și 3, cu ponderile 4, respectiv 16;
   d. 0,4 și 1,(6), cu ponderile 0,5, respectiv 1,5.
3. Calculați media aritmetică ponderată a numerelor a și b, cu ponderile p_1, respectiv p_2:
   a. $a=5\sqrt{3},\ b=3\sqrt{3},\ p_1=3,\ p_2=6$;
   b. $a=\sqrt{8},\ b=\sqrt{32},\ p_1=4,\ p_2=2$;
   c. $a=\sqrt{24},\ b=-\sqrt{54},\ p_1=5,\ p_2=3$;
   d. $a=0{,}1\sqrt{7},\ b=2{,}5\sqrt{7},\ p_1=10,\ p_2=6$.
4. Se consideră numerele $a=2\sqrt{72}+\sqrt{128}+\sqrt{50}$ și $b=2\sqrt{8}+\sqrt{32}-3\sqrt{18}+\sqrt{200}$. Calculați media geometrică a numerelor a și b.
5. Calculați media geometrică a numerelor a și b, dacă $a=3\cdot\sqrt{1{,}5\cdot 4+2\sqrt{576}}$, iar $b=\sqrt{0{,}(6)\cdot 3+2\sqrt{121}}$.
6. Calculați media aritmetică ponderată a numerelor a și b, cu ponderile p_1, respectiv p_2, dacă:
$$a=\left[2\cdot 0{,}(6)+1{,}(6)\right]\cdot 3\sqrt{3},\ b=0{,}2\cdot\left[(3\sqrt{5}+\sqrt{20})\cdot\sqrt{15}-(\sqrt{24}+\sqrt{54})\cdot\sqrt{2}\right],\ p_1=2,\ p_2=4.$$
7. Verificați relația $m_g\le m_a$, pentru următoarele perechi de numere:
   a. 15 și 24;
   b. $2\frac{3}{4}$ și 4;
   c. $\sqrt{2}$ și $\sqrt{18}$;
   d. $\frac{5}{\sqrt{3}}$ și $\sqrt{3}$.
8. Determinați numărul real x, dacă media aritmetică a numerelor $4\sqrt{3}$, $6\sqrt{3}$ și x este egală cu $7\sqrt{3}$.
9. Determinați numărul real pozitiv x, dacă media geometrică a numerelor 6 și x este egală cu $6\sqrt{3}$.
10. Media aritmetică ponderată a numerelor $\frac{2}{3}$, 1,5 și x, cu ponderile 6, 4, respectiv 5, este 2. Determinați numărul real x.
11. La începutul lunii decembrie, angajații unui supermarket ambalează diferite tipuri de bomboane de pom, în mod egal, în pachete de câte 1 kg. Știind că ei au la dispoziție 25 kg de praline a 60 de lei kilogramul, 35 de kilograme de fondante a 56 de lei kilogramul, 40 de kilograme de caramele a 42 de lei kilogramul și 60 de kilograme de jeleuri a 35 de lei kilogramul, determinați costul unui pachet.

12. Media geometrică a două numere naturale este 7. Determinați numerele.

Minitest

1. Calculați media aritmetică și media geometrică a următoarelor numere:
   $a=3\sqrt{50}-3\sqrt{32}+\sqrt{98}$ și $b=2\sqrt{8}+5\sqrt{72}-2\sqrt{200}$. **(3p)**
2. Alegeți varianta corectă. Media aritmetică ponderată a numerelor $\frac{5}{6}$, $1\frac{2}{5}$ și 2,4, cu ponderile 12, 10, respectiv 5, este:
   a. $\frac{4}{3}$;
   b. 1;
   c. $\frac{1}{5}$;
   d. $\frac{3}{4}$. **(3p)**
3. Media geometrică a numerelor $5\sqrt{3}$ și x ($x\ge 0$) este egală cu $2\sqrt{15}$. Determinați numărul real x. **(3p)**

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Lecția 9: Ecuația de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$

Cuvinte-cheie

ecuație | mulțimea soluțiilor | pătrat | soluții | radical

Situație-problemă

În Figura 1 este reprezentat un pătrat în care lungimea laturii este notată cu x. Determinăm valoarea numărului real x, știind că aria pătratului este egală cu $1\,369\ \text{m}^2$.

Aria unui pătrat este pătratul lungimii laturii, deci $x^2 = 1369$.

Observăm că un număr care, ridicat la pătrat, dă 1 369 este $\sqrt{1369} = 37$.

Avem $37^2 = (-37)^2 = 1\,369$, deci am putea crede că $x = 37$ sau $x = -37$.

Deoarece lungimea laturii unui pătrat nu poate fi un număr negativ, singura posibilitate este $x = 37$.

x m
Figura 1

Ce observăm?

Pentru orice număr real pozitiv a, egalitatea $x^2 = a$ este verificată de două numere reale opuse: $x_1 = \sqrt{a}$ și $x_2 = -\sqrt{a}$.

De reținut

Fie a un număr real. A rezolva ecuația $x^2 = a$ în mulțimea numerelor reale înseamnă a determina toate valorile reale ale lui x pentru care egalitatea $x^2 = a$ este adevărată.

Valorile lui x care verifică egalitatea $x^2 = a$ se numesc *soluțiile ecuației*. Mulțimea soluțiilor ecuației se notează, de regulă, cu S.

Exemple

Rezolvați următoarele ecuații în mulțimea numerelor reale:

1. $x^2 = 25$;
2. $3x^2 = 21$;
3. $5x^2 = 0$;
4. $-2x^2 = 32$.

Rezolvare:

1. Există două numere reale al căror pătrat este 25 și anume $\sqrt{25} = 5$ și $-\sqrt{25} = -5$. Ecuația are soluțiile $x_1 = 5$ și $x_2 = -5$. Putem scrie și că mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{-5, 5\}$.
2. Dacă $3x^2 = 21$, atunci $x^2 = 21 : 3$, adică $x^2 = 7$, deci $S = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$.
3. Din $5x^2 = 0$ rezultă $x^2 = 0 : 5$, adică $x^2 = 0$. Există un singur număr real al cărui pătrat este egal cu 0, acesta fiind 0. Așadar $x = 0$. Putem scrie $S = \{0\}$.
4. Obținem $x^2 = 32 : (-2)$, adică $x^2 = -16$. Nu există niciun număr real al cărui pătrat să fie -16, deoarece pătratul oricărui număr real este mai mare sau egal cu 0. Ecuația nu are nicio soluție. Scriem și $S = \varnothing$ (mulțimea vidă).

Observație

Fie a un număr real arbitrar. Atunci:

1. Dacă $a < 0$, ecuația $x^2 = a$ nu are soluție.
2. Dacă $a = 0$, ecuația $x^2 = a$ are soluția unică $x = 0$.
3. Dacă $a > 0$, ecuația $x^2 = a$ are două soluții: $x_1 = \sqrt{a}$ și $x_2 = -\sqrt{a}$.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Rezolvați următoarele ecuații, unde x este număr real:

a. $0{,}2x^2 + 0{,}8 = 4$; b. $5(x^2 + \sqrt{3}) = \sqrt{75}$; c. $(x-1)^2 = 16$; d. $x^2 = 2 - \sqrt{5}$.

Rezolvare:

a. $0,2x^2 + 0,8 = 4 \Leftrightarrow 0,2x^2 = 4 - 0,8 \Leftrightarrow 0,2x^2 = 3,2 \Leftrightarrow x^2 = 3,2 : 0,2 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x \in \{-4; 4\}$;

b. Mai întâi scoatem factorii de sub radical: $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$. Ecuația dată este echivalentă cu:
$5(x^2 + \sqrt{3}) = 5\sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 + \sqrt{3} = 5\sqrt{3} : 5 \Leftrightarrow x^2 + \sqrt{3} = \sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{3} - \sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

c. $(x-1)^2 = 16 \Leftrightarrow x - 1 = 4$ sau $x - 1 = -4 \Leftrightarrow x = 5$ sau $x = -3 \Leftrightarrow x \in \{-3; 5\}$;

d. $x^2 = 2 - \sqrt{5}$. Observăm că $2 - \sqrt{5} < 0$, deci nu există niciun număr real al cărui pătrat să fie egal cu $2 - \sqrt{5}$. Prin urmare, ecuația nu are soluții reale.

2. Un teren are forma unui pătrat cu aria de 64 m². Cu câți metri trebuie să se mărească fiecare latură a terenului, astfel încât aria noului teren să fie cu 36 m² mai mare decât a terenului inițial?

Rezolvare:

Terenul este un pătrat. Rezultă că $A_{teren} = l^2$, unde l reprezintă latura pătratului.
Obținem astfel $l^2 = 64$ m², de unde rezultă că $l = 8$ m, deoarece $l > 0$.
Aria terenului obținut după mărire este egală cu $64 \text{ m}^2 + 36 \text{ m}^2 = 100 \text{ m}^2$.
Noul teren are, astfel, forma unui pătrat cu aria de 100 m². Deci latura noului teren va fi de 10 m (deoarece $100 = 10^2$).
Cum $10 \text{ m} - 8 \text{ m} = 2$ m, înseamnă că fiecare latură a terenului trebuie mărită cu 2 metri pentru a îndeplini cerința problemei.
Soluția problemei se poate rescrie astfel, folosind ecuația atașată acesteia:
notând cu x numărul de metri cu care trebuie să se mărească fiecare latură a terenului, obținem ecuația $(\sqrt{64} + x)^2 = 64 + 36$, adică $(8 + x)^2 = 100$. Cum $x > 0$, obținem $8 + x = 10$, deci $x = 2$ m.

Probleme propuse

1. Precizați care dintre următoarele ecuații admit soluția $x = 1$:
a. $x^2 = 2$; b. $5x^2 = 5$; c. $x^2 + 9 = 11$; d. $-x^2 + 14 = 15$; e. $(x+4)^2 + 4 = 5^2 + 2^2$.

2. Rezolvați ecuațiile, unde x este număr natural:
a. $x^2 = 36$; b. $x^2 = 100$; c. $x^2 = -25$; d. $2x^2 = 18$; e. $x^2 + 2 = 27$; f. $x^2 = 8$.

3. Rezolvați ecuațiile, unde x este număr întreg negativ:
a. $x^2 = 16$; b. $3x^2 = 75$; c. $x^2 + 3 = 3$; d. $x^2 - 12 = 37$; e. $3x^2 = 36$; f. $-x^2 = 9$.

4. Rezolvați ecuațiile, unde x este număr real:
a. $x^2 = 81$; b. $4x^2 = 900$; c. $2x^2 + 7 = 9$; d. $-x^2 - 4 = -4$; e. $6x^2 : 5 = 12$; f. $20 : x^2 = 10$.

5. Determinați latura unui pătrat ce are aria egală cu 196 m².

6. Rezolvați ecuațiile, unde x este număr real:
a. $x^2 = 1,69$; b. $2x^2 = 1,28$; c. $0,5x^2 = 0,98$; d. $-1,3x^2 = 5,2$.

7. Rezolvați ecuațiile, unde x este număr real:
a. $x^2 = \frac{144}{49}$; b. $x^2 + \frac{3}{4} = 1$; c. $\frac{x^2}{5} - \frac{2}{3} = \frac{13}{3}$; d. $-\frac{5}{6}x^2 = -\frac{10}{27}$.

8. Rezolvați ecuațiile, unde x este număr real:
a. $0,25x^2 + 5,32 = 5,41$; b. $x^2 \cdot 0,(3) = 5,(3)$; c. $1,(5)x^2 : 2 = 0,(7)$; d. $-x^2 + 2 = 0,(2)$.

9. Rezolvați ecuațiile, unde x este număr real:
a. $\sqrt{3}x^2 = \sqrt{12}$; b. $3\sqrt{2}x^2 + \sqrt{8} = \sqrt{50}$; c. $4(\sqrt{5}x^2 - \sqrt{5}) = \sqrt{80}$; d. $0,5x^2 + \sqrt{0,25} = 1$.

Autoevaluare

1. Rezolvați următoarele ecuații, unde x este număr real:

a. $x^2 = 9$; **b.** $5x^2 = 125$; **c.** $0{,}2x^2 + 10 = 25$. **(3p)**

2. Alegeți varianta corectă. Numărul real pozitiv care este soluție a ecuației $7(\sqrt{6}x^2 - \sqrt{54}) = 6\sqrt{294}$ este:

a. 6; **b.** 3; **c.** $\sqrt{6}$; **d.** 1. **(3p)**

3. Suprafața unui teren este împărțită în 3 parcele egale, fiecare având forma unui pătrat. Determinați lungimea laturii pătratului, dacă aria terenului inițial este egală cu 675 m^2. **(3p)**

Notă. Se alocă 1 punct pentru fiecare subpunct rezolvat corect. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Recapitulare și evaluare

Puterea cu exponent întreg a unui număr real • Ordinea efectuării operațiilor cu numere reale • Raționalizarea numitorului unei fracții • Media aritmetică ponderată • Media geometrică • Ecuația de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$

Pentru exercițiile 1-8, notați în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect. Pentru exercițiile 9-14, scrieți rezolvările complete.

1. Pătratul numărului $\sqrt{3}$ este:

a. 9; **b.** 3; **c.** 6; **d.** 1,5.

2. Media geometrică a numerelor 4 și 9 este:

a. 6; **b.** 6,5; **c.** 13; **d.** $\sqrt{13}$.

3. Raționalizând numitorul fracției $\frac{3}{\sqrt{3}}$, se obține:

a. 3; **b.** -3; **c.** $\sqrt{3}$; **d.** $-\sqrt{3}$.

4. Calculând $(-\sqrt{2})^3$, se obține:

a. 4; **b.** $-2\sqrt{2}$; **c.** $2\sqrt{2}$; **d.** 8.

5. Calculând $(\sqrt{5})^4 : (\sqrt{5})^2$, se obține:

a. $\sqrt{5}$; **b.** $(\sqrt{5})^6$; **c.** 5; **d.** 25.

6. Calculând $\left[(-3\sqrt{5})^4\right]^0$, se obține:

a. $-3\sqrt{5}$; **b.** $3\sqrt{5}$; **c.** 0; **d.** 1.

7. Calculând $(-\sqrt{4})^{-2}$, se obține:

a. $\frac{1}{16}$; **b.** 16; **c.** 4; **d.** $\frac{1}{4}$.

8. Numărul $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-2}$ este:

a. natural; **b.** întreg;
c. rațional; **d.** irațional.

9. Precizați care dintre enunțurile de mai jos este adevărat (**A**) și care este fals (**F**):

a. $\left[(\sqrt{3})^2\right]^3 = (\sqrt{3})^5$
b. $(\sqrt{4})^3 = 8$
c. $(\sqrt{5})^0 = 1$

10. Asociați fiecărei expresii din coloana **A** răspunsul corect din coloana **B**:

A	B
A. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$	**a.** 1
B. $\sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5}$	**b.** 25
C. $\left[(2\sqrt{5} - \sqrt{5}) : \sqrt{5}\right]^3$	**c.** $\sqrt{20}$
	d. $\sqrt{80}$

11. Scrieți inversul numărului $-\frac{\sqrt{5}}{10}$.

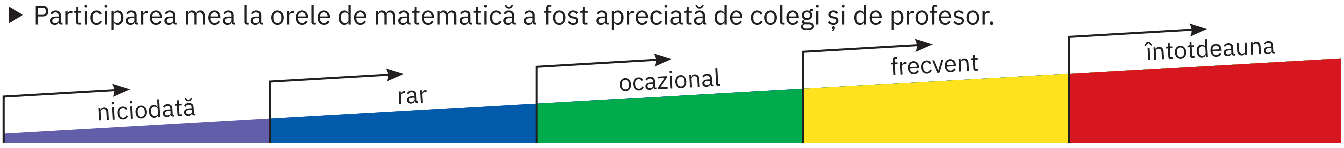
12. Calculați media aritmetică ponderată a numerelor $\sqrt{20}$ și $\sqrt{245}$, cu ponderile 2, respectiv 3.

13. Rezolvați ecuația, unde x este număr real: $2x^2 + 15 = 35$.

14. Media geometrică a două numere naturale este egală cu 12. Unul dintre numere este 9. Determinați celălalt număr.

Fișa de observare sistematică

- ▶ Am fost preocupat să aflu lucruri noi despre metodele de rezolvare a problemelor.
- ▶ Participarea mea la orele de matematică a fost apreciată de colegi și de profesor.



U2 Ecuații și sisteme de ecuații liniare

Lecția 1	Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități
Lecția 2	Ecuații de forma $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Mulțimea soluțiilor unei ecuații. Ecuații echivalente
Lecția 3	Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute
Lecția 4	Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau al sistemelor de ecuații liniare
Recapitulare și evaluare	

Dronele se află în aer, în timp ce piloții lor se află la sol, în siguranță. Aceste aparate funcționează datorită capacității oamenilor de a programa un set de acțiuni (decolare, viraj, aterizare), pentru care se utilizează ecuațiile liniare. Aceste ecuații sunt folosite în calcularea vitezei, distanței și a timpului mișcării unui obiect.

2.1

Lecția 1: Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități

Cuvinte-cheie

egalitate | echivalent | membri | operații

Relația de egalitate. Recapitulare și completări

Două numere reale a și b sunt egale dacă numerelor a și b le corespunde același punct pe axa numerelor. Scriem $a=b$. Ne reamintim că, pe mulțimea numerelor raționale, relația de egalitate este reflexivă, simetrică și tranzitivă. Aceste proprietăți se extind și pe mulțimea numerelor reale.

Astfel, relația de egalitate pe mulțimea $\mathbb{R}$ are următoarele proprietăți:

1. Reflexivitatea: $x=x$, pentru orice număr real x (altfel spus, orice număr real este egal cu el însuși).

2. Simetria: dacă x și y sunt două numere reale astfel încât $x=y$, atunci $y=x$.

3. Tranzitivitatea: dacă x, y, z sunt trei numere reale astfel încât $x=y$ și $y=z$, atunci $x=z$.

În general, prin egalitate vom înțelege un enunț în care intervin două expresii matematice între care se scrie semnul $=$ (egal), care semnifică faptul că expresiile au aceeași valoare.

Într-o egalitate, expresia scrisă în stânga semnului de egalitate se numește *membrul stâng* al egalității, iar expresia scrisă în dreapta semnului de egalitate se numește *membrul drept* al egalității.

Exemplu: $\underbrace{6\cdot 5-\sqrt{16}:2}_{\text{membrul stâng}}=\underbrace{3\cdot 6+5\cdot 2}_{\text{membrul drept}}$.

Observații

1. Un enunț (o afirmație) în care intervine semnul egal poate fi adevărat sau fals.

Exemple: Afirmația $2+8=13-\sqrt{9}$ este adevărată, iar afirmația $15\sqrt{2}:3=2\cdot 4$ este falsă.

2. În anumite cazuri, unii dintre termenii unei egalități sunt numere reale care se reprezintă prin litere, precum a, b, c, x, y, z etc. Altfel spus, aceste litere, numite variabile, țin locul unor numere reale. În astfel de cazuri, trebuie precizată mulțimea valorilor pe care le pot lua variabilele. Dacă nu se face nicio precizare asupra mulțimii, se consideră că mulțimea valorilor variabilelor este $\mathbb{R}$.

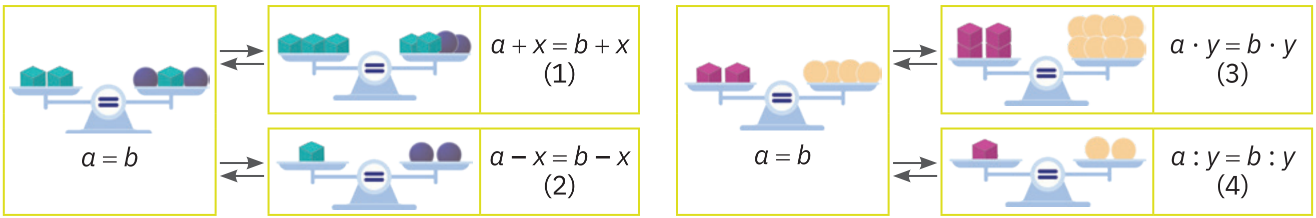
Exemple:

- $\sqrt{a^2}-b+c=a-(b-c)$, unde $a, b, c\in\mathbb{N}$;
- $a\cdot b+3=\sqrt{64}-5+b\cdot a$, unde $a, b, c\in\mathbb{Q}$;
- $a+a^2=a^3+a^4$, unde $a\in\{-1, 0, 1\}$;
- $x^2+2x+1=1+x(x+2)$, unde $x\in\mathbb{R}$.

Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă

Mate practică

Următoarele desene schematice ne sugerează că un cub cântărește tot atât cât două bile.
Orice două cuburi din aceste imagini au masele egale; de asemenea, masele oricăror două bile sunt egale.



- Dacă adăugăm un cub pe ambele talere, balanța rămâne în echilibru (relația (1)).
- Dacă eliminăm un cub de pe ambele talere, balanța rămâne în echilibru (relația (2)).
- Dacă mărim de două ori numărul cuburilor de pe primul taler și numărul bilelor de pe al doilea taler tot de două ori, balanța rămâne în echilibru (relația (3)).
- Dacă micșorăm de două ori numărul cuburilor de pe primul taler și numărul bilelor de pe al doilea taler tot de două ori, balanța rămâne în echilibru (relația (4)).

Din imaginile precedente putem observa că, dacă a, b, x sunt numere reale astfel încât are loc egalitatea $a = b$, atunci are loc și egalitatea $a + x = b + x$, dar și reciproc, dacă are loc egalitatea $a + x = b + x$, atunci are loc și egalitatea $a = b$.

Spunem că egalitățile $a = b$ și $a + x = b + x$ sunt echivalente și scriem $a = b \Leftrightarrow a + x = b + x$. Semnul $\Leftrightarrow$ se citește „echivalent".

De reținut

Fiind dată o egalitate, se obțin egalități echivalente prin următoarele transformări:
- adunăm sau scădem același număr real din ambii membri ai egalității;
- înmulțim sau împărțim ambii membri ai egalității cu un număr real, nenul;
- ridicăm la o putere cu exponent întreg nenul ambii membri ai unei egalități între două numere pozitive;
- extragem rădăcină pătrată din ambii membri ai unei egalități între numere reale nenegative.

Cu alte cuvinte, au loc următoarele echivalențe, numite *proprietăți de compatibilitate* între relația de egalitate și operațiile cu numere reale:

Regula generală	Exemplu
$a = b \Leftrightarrow a + x = b + x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$	$a = b \Leftrightarrow a + \sqrt{5} = b + \sqrt{5}$
$a = b \Leftrightarrow a - x = b - x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$	$a = b \Leftrightarrow a - 3{,}7 = b - 3{,}7$
$a = b \Leftrightarrow a \cdot x = b \cdot x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, cu $x \neq 0$	$a = b \Leftrightarrow a \cdot \sqrt{3} = b \cdot \sqrt{3}$
$a = b \Leftrightarrow a : x = b : x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, cu $x \neq 0$	$a = b \Leftrightarrow \dfrac{a}{-25} = \dfrac{b}{-25}$
Dacă $a > 0$, $b > 0$ și $n \in \mathbb{Z}^*$, atunci $a = b \Leftrightarrow a^n = b^n$	$n + 2 = m + 1 \Leftrightarrow (n + 2)^2 = (m + 1)^2$, $n, m \in \mathbb{N}$
Dacă $a \geq 0$ și $b \geq 0$, atunci $a = b \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$.	$n + 5 = m - 1 \Leftrightarrow \sqrt{n+5} = \sqrt{m-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}^*$

De reținut

Fiind date două egalități, se pot obține noi egalități astfel:
- cele două egalități se adună sau se scad, membru cu membru;
- cele două egalități se înmulțesc sau se împart (dacă este posibil), membru cu membru.

Altfel spus, pentru orice numere reale a, b, c și d avem:
- dacă $\begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases}$, atunci $\begin{cases} a + c = b + d \\ a - c = b - d \\ a \cdot c = b \cdot d \end{cases}$;
- dacă $\begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases}$, unde $c, d \neq 0$, atunci $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$.

Exemple

Dacă x, y, z, t, u, v sunt numere reale astfel încât $x + y = 35$, $u - v = -25$ și $z - t = -5$, atunci:
- $(x + y) + (u - v) = 35 + (-25) \Leftrightarrow x + y + u - v = 10$
- $(x + y) - (u - v) = 35 - (-25) \Leftrightarrow x + y - u + v = 60$
- $(x + y) \cdot (z - t) = 35 \cdot (-5) \Leftrightarrow (x + y) \cdot (z - t) = -175$
- $\dfrac{x+y}{z-t} = \dfrac{35}{-5} \Leftrightarrow \dfrac{x+y}{z-t} = -7$
- $\dfrac{u-v}{z-t} = \dfrac{-25}{-5} \Leftrightarrow \dfrac{u-v}{z-t} = 5$

Identități

De reținut

O afirmație în care intervin semnul de egalitate și una sau mai multe variabile (numere reale reprezentate prin litere), care este adevărată pentru orice valoare a variabilelor din mulțimea de valori, se numește *identitate*.

Exemple

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, unde a, b, c sunt numere reale, este o identitate.
- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, unde a și b sunt numere reale nenegative, este o identitate.
- Enunțul $a + \sqrt{25} = 7$ nu este o identitate, deoarece, de exemplu, pentru $a = 4$, afirmația $4 + 5 = 7$ este falsă.

2.1

Exerciții și probleme rezolvate

1. Se consideră numerele: $a = 1{,}5,\ b = 2\sqrt{3},\ c = \frac{3}{2},\ d = \sqrt{12}$. Fără a efectua operațiile, stabiliți dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false:

a. $a + 3 = c + 3$; b. $\frac{a}{2} = \frac{c}{3}$; c. $a + b = c + d$; d. $a : b = c : d$; e. $-\frac{3}{2}b = -\frac{3}{2}d$.

Rezolvare:
Observăm mai întâi că $a = c$ și $b = d$.
- Adunăm 3 ambilor membri ai egalității $a = c$ și obținem $a + 3 = c + 3$.
- Împărțind ambii membri ai egalității $a = c$ la 2, obținem $\frac{a}{2} = \frac{c}{2}$. Cum $c \neq 0$, avem $\frac{c}{2} \neq \frac{c}{3}$, deci $\frac{a}{2} \neq \frac{c}{3}$.
- Deoarece $a = c$ și $b = d$, rezultă că $a + b = c + d$.
- Deoarece $a = c$ și $b = d$, iar b și d sunt nenule, rezultă că $a : b = c : d$.
- Înmulțim cu $-\frac{3}{2}$ ambii membri ai egalității $b = d$ și obținem $-\frac{3}{2}b = -\frac{3}{2}d$.

Așadar, afirmațiile **a**, **c**, **d** și **e** sunt adevărate, iar **b** este falsă.

2. Se consideră numerele reale a, b și c, astfel încât $a + 2b = 5$ și $b - 3c = -7$. Determinați:

a. $a + 3b - 3c$; b. $a + b + 3c$; c. $3a + 8b - 6c$; d. $a + 6c$.

Rezolvare:
a. Adunăm cele două egalități, membru cu membru. Obținem $(a + 2b) + (b - 3c) = 5 + (-7)$, adică $a + 3b - 3c = -2$.
b. Scădem cele două egalități, membru cu membru. Obținem $(a + 2b) - (b - 3c) = 5 - (-7)$, adică $a + b + 3c = 12$.
c. Înmulțim membrii primei egalități cu 3 și obținem $3a + 6b = 15$. Înmulțim membrii celei de-a doua egalități cu 2 și obținem $2b - 6c = -14$. Adunăm apoi cele două egalități obținute, membru cu membru: $(3a + 6b) + (2b - 6c) = 15 + (-14)$, de unde rezultă $3a + 8b - 6c = 1$.
d. Înmulțim membrii celei de-a doua egalități cu 2 și obținem $2b - 6c = -14$. Scădem membru cu membru egalitățile $a + 2b = 5$ și $2b - 6c = -14$. Obținem $(a + 2b) - (2b - 6c) = 5 - (-14)$, de unde rezultă $a + 6c = 19$.

3. Arătați că egalitatea $\sqrt{(n+2)^2} + \sqrt{16} = 2(n+3) - n$ este o identitate, oricare ar fi numărul natural n.

Rezolvare:
Cum $n \in \mathbb{N}$, rezultă că $n + 2 > 0$, deci $|n + 2| = n + 2$. Membrul stâng al egalității se rescrie:

$$\sqrt{(n+2)^2} + \sqrt{16} = |n+2| + 4 = n + 2 + 4 = n + 6 \quad (1).$$

Efectuând calculele în membrul drept al egalității, obținem $2(n + 3) - n = 2n + 6 - n = n + 6$ (2).
Din relațiile (1) și (2), aplicând proprietatea de tranzitivitate a relației de egalitate, rezultă că

$$\sqrt{(n+2)^2} + \sqrt{16} = 2(n+3) - n, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

Probleme propuse

1. Se consideră numerele reale a și b, astfel încât $a + b = 2$. Înmulțiți ambii membri ai egalității date cu 2. Ce egalitate se obține?

2. Pornind de la egalitatea $a - 2b = 5$, unde a și b sunt numere reale, scrieți egalitățile ce se obțin înmulțind ambii membri ai egalității cu:

a. 2; b. 3; c. 4; d. 10; e. -2; f. -5.

3. Se consideră numerele reale x și y, astfel încât $2x + 2y = 8$. Determinați:

a. $x + y$; b. $3x + 3y$; c. $5x + 5y$; d. $-x - y$; e. $-2x - 2y$; f. $-9x - 9y$.

4. Stabiliți dacă următoarele egalități sunt adevărate sau false:

a. $\sqrt{16} = 4$; b. $\sqrt{25} = -5$; c. $\frac{1}{2} = 0{,}25$; d. $-\frac{3}{4} = -0{,}75$; e. $1{,}(2) = \frac{10}{9}$; f. $\sqrt{324} = 18$.

5. Se consideră numerele: $a=\frac{1}{3}$, $b=\sqrt{18}$, $c=0,(3)$, $d=3\sqrt{2}$. Fără a efectua operațiile, stabiliți dacă următoarele egalități sunt adevărate sau false:

a. $a+2=c+2$; b. $b-5=c-5$; c. $3a=4c$; d. $a+b=c+d$; e. $b:5=c:5$.

6. Se consideră numerele reale a, b, c, astfel încât $a+b=3$, $b+c=5$ și $a+c=8$. Determinați:

a. $a+2b+c$; b. $2a+2b+2c$; c. $a+b+c$; d. $a-c$; e. $b-c$.

7. Se consideră egalitatea $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$. Pornind de la această egalitate, scrieți trei egalități echivalente. Pentru aceasta, adunați, înmulțiți, respectiv împărțiți ambii membri ai egalității date cu același număr real nenul.

8. Folosind proprietățile relației de egalitate, justificați echivalențele următoare:

a. $2x-5=11 \Leftrightarrow 2x=11+5 \Leftrightarrow 2x=16 \Leftrightarrow x=8$;

b. $\frac{x}{2}-1=7 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=7+1 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=8 \Leftrightarrow x=8\cdot 2 \Leftrightarrow x=16$;

c. $4x-5=2x+9 \Leftrightarrow 4x-2x=9+5 \Leftrightarrow 2x=14 \Leftrightarrow x=14:2 \Leftrightarrow x=7$.

9. Fie numerele reale x și y astfel încât $x+y=4$ și $x-y=2$. Arătați că $x=3$.

10. Arătați că, dacă x și y sunt numere reale astfel încât $0,1x-0,2y=0$, atunci $x=2y$.

11. Dacă a și b sunt numere reale astfel încât $3a+2b+12=4x$ și $a+2b=2x$, arătați că $a+6=x$.

12. Demonstrați identitatea $\sqrt{(2n+3)^2}+\sqrt{4}=2(n+3)-1$, oricare ar fi numărul natural n.

Minitest

1. Stabiliți dacă următoarele egalități sunt adevărate sau false:

a. $\frac{9}{2}=9,2$; b. $\sqrt{49}=7$; c. $2\sqrt{5}=5\sqrt{2}$; d. $-3\sqrt{2}=-\sqrt{18}$. (3p)

2. Dacă a, b, c sunt numere reale, astfel încât $a+b=8$, $b+c=11$ și $a+c=9$, atunci $a+b+c$ este egal cu:

A. 10; B. 12; C. 14; D. 16. (3p)

Notați în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect.

3. Se consideră numerele reale x, y, z, astfel încât $x+2y=5$, $y+2z=10$ și $2x+z=6$. Determinați:

a. $3x+3y+3z$; b. $x+y-2z$; c. $4y-z$; d. $2x-y-z$. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

2.2

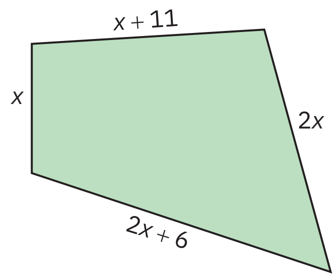
Lecția 2: Ecuații de forma $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Mulțimea soluțiilor unei ecuații. Ecuații echivalente

Cuvinte-cheie

ecuație | echivalent | soluție | necunoscută | coeficient | termen liber

Situație-problemă

O curte are forma patrulaterului din figura alăturată. Lungimile laturilor patrulaterului, notate pe figură, sunt exprimate în metri.



a. Determinați numărul natural x știind că lungimea gardului ce înconjoară curtea este egală cu 83 de metri.

b. Determinați numărul rațional x știind că lungimea gardului ce înconjoară curtea este egală cu 94 de metri. Numărul x este natural?

c. Există un număr real x, astfel încât lungimea gardului ce înconjoară curtea să fie egală cu 11 metri?

Rezolvare:

Perimetrul patrulaterului este egal cu $x + (x + 11) + 2x + (2x + 6) = 6x + 17$ (metri) și coincide cu lungimea gardului.

a. Dacă lungimea gardului este de 83 de metri, obținem relația $6x + 17 = 83$. Atunci $6x = 83 - 17$, adică $6x = 66$, de unde rezultă $x = 11$, iar 11 este număr natural.

b. Dacă lungimea gardului este de 94 de metri, obținem $6x + 17 = 94$, de unde $6x = 77$, adică $x = \frac{77}{6}$, care nu este număr natural.

c. Obținem relația $6x + 17 = 11$, care implică $6x = -6$, de unde $x = -1$, ceea ce este imposibil, deoarece x, reprezentând o lungime, este număr pozitiv. Deci nu există niciun număr real (în mod necesar pozitiv) astfel încât lungimea gardului să fie egală cu 11 metri.

Ce observăm?

Pentru a determina soluția problemei, am recurs la rezolvarea unei ecuații. În stabilirea răspunsului final, a fost necesar să luăm în considerare mulțimea în care se rezolvă ecuația. Observăm că o ecuație nu are întotdeauna soluții.

Ecuația $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Mulțimea soluțiilor unei ecuații

De reținut

O ecuație de forma $ax + b = 0$, unde a și b sunt numere reale, $a \neq 0$, se numește *ecuație de gradul I* cu o necunoscută.

Numărul x se numește *necunoscuta ecuației*, iar numerele reale a și b se numesc *coeficienți: a* este coeficientul necunoscutei, iar b se mai numește *termenul liber*.

Denumirea de *ecuație de gradul I* provine de la faptul că necunoscuta x apare în ecuație cu exponentul 1.

Exemple

1. Ecuația $2x + 5 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, reprezintă o ecuație de gradul I cu necunoscuta x. Coeficientul necunoscutei este 2, iar termenul liber este 5.
2. Egalitatea $2 \cdot 4 - 1 = 7$ nu reprezintă o ecuație.

De reținut

Un număr real se numește *soluție* a unei ecuații dacă, înlocuind necunoscuta cu acest număr în ecuația dată, se obține o afirmație adevărată.

A rezolva o ecuație în mulțimea numerelor reale înseamnă a determina toate soluțiile sale.

Aceste soluții formează mulțimea soluțiilor ecuației date, mulțime care se notează, de regulă, cu S.

Dacă după o ecuație urmează o precizare de forma $x \in M$, unde $M \subset \mathbb{R}$, aceasta indică mulțimea în care ia valori necunoscuta. Se spune că ecuația dată este definită pe mulțimea M sau că se rezolvă în mulțimea M. Se mai spune că M este domeniul ecuației.

Dacă nu se face nicio precizare, se consideră că $M = \mathbb{R}$.

Exemplu

Care dintre ecuațiile următoare admite soluția −4?

1. $3x + 12 = 0$, $x \in \{-5, -4, -1, 0\}$.
2. $\frac{3}{4}x + 3 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.
3. $-x + 4 = 0$, $x \in \mathbb{Z}$.

Răspuns:

1. $3 \cdot (-4) + 12 = 0 \Leftrightarrow -12 + 12 = 0$, adevărat, deci −4 este soluție.
2. $\frac{3}{4} \cdot (-4) + 3 = 0 \Leftrightarrow -3 + 3 = 0$, adevărat, deci −4 este soluție.
3. $-(-4) + 4 = 0 \Leftrightarrow 4 + 4 = 0 \Leftrightarrow 8 = 0$, fals, deci −4 nu este soluție.

Algoritm pentru rezolvarea ecuației de gradul I cu o necunoscută

Se consideră ecuația $ax + b = 0$, unde a și b sunt numere reale, $a \neq 0$.

Pasul 1: Se scade b din ambii membri ai ecuației și se aduce ecuația la forma $ax = -b$ (altfel spus, se separă necunoscuta în membrul stâng, trecând termenul liber în membrul drept, cu semn schimbat).

Pasul 2: Se împart ambii membri ai ecuației $ax = -b$ prin a și se găsește soluția $x = -\frac{b}{a}$.

Pasul 3: Se scrie mulțimea soluțiilor ecuației: $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Practic, au loc următoarele echivalențe:

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}.$$

Exemple: **1.** $2x + 6 = 0 \Leftrightarrow 2x = -6 \Leftrightarrow x = -\frac{6}{2} \Leftrightarrow x = -3 \Leftrightarrow S = \{-3\}$.

2. $\sqrt{3} \cdot x - 3\sqrt{12} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot x = 3\sqrt{12} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{12}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = 3 \cdot \frac{\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = 6 \Leftrightarrow S = \{6\}$.

Ecuații echivalente

De reținut

Două ecuații definite pe aceeași mulțime se numesc *echivalente* dacă au aceleași soluții.

Pentru a obține o ecuație echivalentă cu o ecuație dată, putem aplica următoarele reguli:

- trecem, cu semn schimbat, termeni dintr-un membru în celălalt;
- adunăm/scădem același număr din ambii membri ai ecuației;
- înmulțim/împărțim ambii membri ai ecuației cu un număr real nenul.

Exemple

1. Ecuațiile $2x - 4 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, și $3x - 6 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, sunt echivalente?

$2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2 \Leftrightarrow S = \{2\}$.

$3x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2 \Leftrightarrow S = \{2\}$.

Observăm că cele două ecuații sunt definite pe aceeași mulțime (pe $\mathbb{R}$) și au aceeași mulțime de soluții, deci ecuațiile sunt echivalente.

2. Ecuațiile $\sqrt{2}x - \sqrt{6} = 0$, $x \in \mathbb{R}$, și $\sqrt{3}x + 9 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, sunt echivalente?

$\sqrt{2}x - \sqrt{6} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x = \sqrt{6} \Leftrightarrow x = \sqrt{6} : \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \Leftrightarrow S = \{\sqrt{3}\}$.

$\sqrt{3}x + 9 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x = -9 \Leftrightarrow x = \frac{^{\sqrt{3})}-9}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = -3\sqrt{3} \Leftrightarrow S = \{-3\sqrt{3}\}$.

Observăm că cele două ecuații sunt definite pe aceeași mulțime și anume pe $\mathbb{R}$, dar nu au aceeași mulțime de soluții. În consecință, aceste ecuații nu sunt echivalente.

2.2

Ecuații reductibile la ecuația $ax + b = 0$

De reținut

Deseori întâlnim ecuații în care necunoscuta x apare doar la puterea întâi, dar care nu au forma $a \cdot x + b = 0$ (1) sau $a \cdot x = b$ (2).

Folosind proprietățile relației de egalitate, se poate arăta că unele dintre aceste ecuații sunt echivalente cu o ecuație de forma (1) sau (2). Vom spune că aceste ecuații sunt *reductibile* la ecuații de gradul I.

Pentru a rezolva o ecuație *reductibilă* la o ecuație de gradul I, se procedează astfel:

Pasul 1: Se aduce ecuația la o formă mai simplă, folosind diverse artificii de calcul (aducere la același numitor, eliminarea numitorilor, desfacerea parantezelor etc.).

Pasul 2: Se separă termenii, păstrând, de regulă, în membrul stâng termenii care conțin necunoscuta, iar în membrul drept termenii liberi (cei care nu conțin necunoscuta) și se aduce ecuația la forma $a \cdot x = b$.

Pasul 3: Se determină soluția/soluțiile și se scrie mulțimea soluțiilor ecuației.

La final, se poate efectua verificarea soluției în ecuația inițială pentru justificarea rezultatului găsit.

Exemplu

Pentru a rezolva în mulțimea numerelor întregi ecuația $\frac{x-2}{3}+\frac{1}{2}=x-0,5-\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$, procedăm astfel:

Pasul 1: Se aduce ecuația la o formă mai simplă, folosind diverse artificii de calcul.

a. Transformăm termenii în fracții ordinare și aducem fracțiile la același numitor:

$$\frac{x-2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{x}{1}-\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{x-2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{x}{1}-\frac{1}{2}-\frac{3}{1} \Leftrightarrow \frac{2(x-2)}{6}+\frac{3}{6}=\frac{6x}{6}-\frac{3}{6}-\frac{18}{6}.$$

b. Înmulțim ambii membri ai ecuației cu numitorul comun și eliminăm numitorii:

$$\frac{2(x-2)}{6}+\frac{3}{6}=\frac{6x}{6}-\frac{3}{6}-\frac{18}{6}\ \Big|\cdot 6 \Leftrightarrow 2(x-2)+3=6x-3-18.$$

c. Desfacem parantezele, folosind distributivitatea înmulțirii față de scădere, și efectuăm calculele:

$$2(x-2)+3=6x-3-18 \Leftrightarrow 2x-4+3=6x-21 \Leftrightarrow 2x-1=6x-21.$$

Pasul 2: Separăm în membrul stâng termenii care conțin necunoscuta, iar în membrul drept termenii care nu conțin necunoscuta (termenii liberi) și aducem ecuația la forma $a \cdot x = b$:

$$2x-1=6x-21 \mid +1 \Leftrightarrow 2x=6x-20 \mid -6x \Leftrightarrow -4x=-20.$$

Pasul 3: Determinăm soluția/soluțiile și scriem mulțimea soluțiilor ecuației, ținând cont de mulțimea în care se rezolvă ecuația:

$$-4x=-20 \mid :(-4) \Leftrightarrow x=\frac{-20}{-4} \Leftrightarrow x=5.$$

Deoarece $x = 5$ și $5 \in \mathbb{Z}$, mulțimea soluțiilor ecuației din enunț este $S=\{5\}$.

Efectuăm verificarea (acest lucru ne ajută să remediem eventualele erori).

$$\frac{5-2}{3}+\frac{1}{2}=5-\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{3}{3}+\frac{1}{2}=5-\frac{1}{2}-\frac{3}{1} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{2}=2-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2}=\frac{3}{2} \text{ (adevărat).}$$

Observații

Există situații în care obținem o ecuație de forma $ax + b = 0$, fără a ști dacă numărul real a este nenul.

1. Dacă $a \neq 0$, prin transformări echivalente obținem succesiv: $ax+b=0 \Leftrightarrow ax=-b \Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}$, care este un număr real și reprezintă singura soluție a ecuației. Scriem $S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

2. Dacă $a = 0$, ecuația devine $0 \cdot x + b = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot x = -b$, cu $b \in \mathbb{R}$. Distingem două cazuri:

a. dacă $b = 0$, ecuația devine $0 \cdot x = 0$, egalitate care are loc pentru orice număr real x, deci $S = \mathbb{R}$;

b. dacă $b \neq 0$, relația $0 \cdot x = -b$ nu se verifică pentru niciun număr real x și atunci $S = \varnothing$.

Exemple

Rezolvăm următoarele ecuații în $\mathbb{R}$:

1. $\sqrt{3}\cdot x-2=10$; **2.** $2(x-\sqrt{9})=2x-6$; **3.** $2(x-3)=3x-8-x$.

Rezolvare:

1. $\sqrt{3}\cdot x-2=10 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cdot x=12 \Leftrightarrow x=\dfrac{12}{\sqrt{3}}=\dfrac{12\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3} \Rightarrow S=\{4\sqrt{3}\}$.

2. $2(x-\sqrt{9})=2x-6 \Leftrightarrow 2x-6=2x-6 \Leftrightarrow 2x-2x=6-6 \Leftrightarrow 0\cdot x=0 \Leftrightarrow S=\mathbb{R}$.

3. $2(x-3)=3x-8-x \Leftrightarrow 2x-6=2x-8 \Leftrightarrow 2x-2x=6-8 \Leftrightarrow 0\cdot x=-2 \Leftrightarrow S=\varnothing$.

Estimarea soluției unei ecuații

A estima soluția unei ecuații înseamnă a evalua cu aproximație această soluție sau, într-o exprimare echivalentă, a aprecia ordinul de mărime sau valoarea soluției, folosind diverse metode. Estimarea este adesea folosită în activitățile comerciale și în economie, atunci când intervin prea multe variabile pentru a putea determina cum vor evolua situațiile cu grad mai ridicat de complexitate.

Exemple

1. Considerăm ecuația $4x-\sqrt{9\,999}=0$. Aceasta se rescrie $4x=\sqrt{9\,999}$, de unde $x=\dfrac{\sqrt{9\,999}}{4}$.

Cum $\sqrt{9\,999}\simeq\sqrt{10\,000}=100$, estimăm că soluția x a ecuației este aproximativ egală cu $\dfrac{100}{4}$, adică $x\simeq 25$.

Folosind eventual calculatorul electronic, găsim că $\dfrac{\sqrt{9\,999}}{4}=24{,}9987\ldots$, ceea ce confirmă că estimarea făcută este destul de apropiată de valoarea exactă a soluției.

2. Ecuația $1998x=40\,007$ are soluția $x=\dfrac{40\,007}{1998}$. Putem scrie $x=\dfrac{40\,000+7}{2\,000-2}$.

Observăm că numerele 2 și 7 sunt mult mai mici decât 2 000 și 40 000. Putem aprecia că valorile 2 și 7 sunt *neglijabile* (ca ordin de mărime) în raport cu 2 000 și 40 000, deci $x=\dfrac{40\,000+7}{2\,000-2}\simeq\dfrac{40\,000}{2\,000}=20$.

Estimarea făcută este suficient de apropiată de valoarea exactă a soluției, deoarece $\dfrac{40\,007}{1\,998}\simeq 20{,}0235\ldots$.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Rezolvați ecuațiile:

a. $4(x+3)-10=2x+12$; b. $2x-1=0$, $x\in\mathbb{Q}$; c. $\sqrt{2}x+\sqrt{18}=\sqrt{32}$, $x\in\{-2,-1,1,2\}$.

Rezolvare:

a. $4(x+3)-10=2x+12 \Leftrightarrow 4x+12-10=2x+12 \Leftrightarrow 4x+2=2x+12 \Leftrightarrow 4x-2x=12-2 \Leftrightarrow 2x=10 \Leftrightarrow x=5 \Leftrightarrow S=\{5\}$.

Verificare: $4(5+3)-10=2\cdot5+12 \Leftrightarrow 4\cdot8-10=22 \Leftrightarrow 22=22$ (adevărat).

b. $2x-1=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\in\mathbb{Q} \Rightarrow S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Verificare: $2\cdot\dfrac{1}{2}-1=1-1=0$ (adevărat).

c. $\sqrt{2}x+\sqrt{18}=\sqrt{32} \Leftrightarrow \sqrt{2}x+3\sqrt{2}=4\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}x=4\sqrt{2}-3\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}x=\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}:\sqrt{2} \Leftrightarrow x=1$.
Cum $1\in\{-2,-1,1,2\} \Rightarrow S=\{1\}$.

Verificare: $\sqrt{2}\cdot1+\sqrt{18}=\sqrt{2}+3\sqrt{2}=4\sqrt{2}=\sqrt{32}$ (adevărat).

2 Rezolvați ecuațiile:

a. $2(x+3)-5=x+6$; b. $\dfrac{5x-3}{4}-\dfrac{3x-1}{3}=1\dfrac{5}{12}+\dfrac{4x-1}{6}$; c. $|2x+3|=5$.

Rezolvare:

a. $2(x+3)-5=x+6 \Leftrightarrow 2x+6-5=x+6 \Leftrightarrow 2x+1=x+6 \Leftrightarrow 2x-x=6-1 \Leftrightarrow x=5 \Leftrightarrow S=\{5\}$.

Verificare: $2(5+3)-5=5+6 \Leftrightarrow 2\cdot8-5=11 \Leftrightarrow 11=11$ (adevărat).

b. $\frac{5x-3}{4}-\frac{3x-1}{3}=1\frac{5}{12}+\frac{4x-1}{6} \Leftrightarrow \frac{15x-9}{12}-\frac{12x-4}{12}=\frac{17}{12}+\frac{8x-2}{12} \Leftrightarrow (15x-9)-(12x-4)=17+(8x-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15x-9-12x+4=17+8x-2 \Leftrightarrow 3x-5=8x+15 \Leftrightarrow 3x-8x=15+5 \Leftrightarrow -5x=20 \Leftrightarrow x=-4 \Leftrightarrow S=\{-4\}$.

Verificare: $\frac{5\cdot(-4)-3}{4}-\frac{3\cdot(-4)-1}{3}=\frac{17}{12}+\frac{4\cdot(-4)-1}{6} \Leftrightarrow \frac{-23}{4}-\frac{-13}{3}=\frac{17}{12}+\frac{-17}{6} \Leftrightarrow \frac{-69}{12}+\frac{52}{12}=\frac{17}{12}+\frac{-34}{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{17}{12}=-\frac{17}{12}$ (adevărat).

c. $|2x+3|=5 \Leftrightarrow 2x+3=5$ sau $2x+3=-5 \Leftrightarrow 2x=5-3$ sau $2x=-5-3 \Leftrightarrow 2x=2$ sau $2x=-8 \Leftrightarrow x=1$ sau $x=-4 \Rightarrow S=\{-4;1\}$.

Verificare: $|2\cdot(-4)+3|=5 \Leftrightarrow |-8+3|=5 \Leftrightarrow |-5|=5$ (adevărat).
$|2\cdot 1+3|=5 \Leftrightarrow |2+3|=5 \Leftrightarrow |5|=5$ (adevărat).

3. Rezolvați ecuația $\frac{5}{x-3}=\frac{2}{x}$.

Rezolvare:
Se impun condițiile: $x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3$ și $x\neq 0$. Deoarece nu se precizează mulțimea în care se rezolvă ecuația, considerăm că aceasta este $\mathbb{R}$. Având în vedere cele două condiții, deducem că $x\in\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$. Avem:

$\frac{5}{x-3}=\frac{2}{x} \Leftrightarrow 5x=2\cdot(x-3) \Leftrightarrow 5x=2x-6 \Leftrightarrow 5x-2x=-6 \Leftrightarrow 3x=-6 \Leftrightarrow x=-2$.

Deoarece $x=-2$ și $-2\in\mathbb{R}\setminus\{0,3\}$, deducem că $S=\{-2\}$.

4. Rezolvați ecuația $(3x-6)(2x+5)(5x+20)(\sqrt{3}x-3)=0$ în mulțimea:

a. $\mathbb{N}$; **b.** $\mathbb{Z}$; **c.** $\mathbb{Q}$; **d.** $\mathbb{R}$.

Rezolvare:
Știm că un produs de factori este egal cu 0 dacă și numai dacă (cel puțin) unul dintre factori este 0.
$(3x-6)(2x+5)(5x+20)(\sqrt{3}x-3)=0 \Leftrightarrow 3x-6=0$ sau $2x+5=0$ sau $5x+20=0$ sau $\sqrt{3}x-3=0 \Leftrightarrow 3x=6$ sau $2x=-5$ sau $5x=-20$ sau $\sqrt{3}x=3 \Leftrightarrow x=2$ sau $x=-2{,}5$ sau $x=-4$ sau $x=\sqrt{3} \Leftrightarrow x\in\{-4;-2{,}5;\sqrt{3};2\}$.

a. În $\mathbb{N}$, $S=\{2\}$. **b.** În $\mathbb{Z}$, $S=\{-4;2\}$. **c.** În $\mathbb{Q}$, $S=\{-4;-2{,}5;2\}$. **d.** În $\mathbb{R}$, $S=\{-4;-2{,}5;\sqrt{3};2\}$.

Probleme propuse

1. Precizați care dintre următoarele relații sunt ecuații:

a. $x-8=0$; **b.** $x+9$; **c.** $2\cdot 3+8=14$; **d.** $x+6<10$; **e.** $\frac{x}{2}+5=0$.

2. Copiați pe caiet, apoi completați tabelul, conform modelului:

Ecuația	$3y-1=0$	$2x+3=0$	$-\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}=0$	$b+1{,}7=0$	$\sqrt{5}x-4\sqrt{2}=0$
Necunoscuta	y				
Coeficientul necunoscutei	3				
Termenul liber	-1				

3. Scrieți ecuația $ax+b=0$ pentru:

a. $a=3$, $b=1$; **b.** $a=-2$, $b=5$; **c.** $a=\frac{5}{4}$, $b=-2$; **d.** $a=\sqrt{3}$, $b=1{,}4$; **e.** $a=-\frac{2}{3}$, $b=\sqrt{6}$.

4. Dați două exemple de:

a. ecuații cu coeficientul necunoscutei egal cu 2;

b. ecuații cu termenul liber egal cu -3;

c. ecuații cu coeficienții opuși.

5. Verificați dacă:

a. numărul 1 este soluție a ecuației $2x-2=0$; **b.** numărul 1,5 este soluție a ecuației $4x-5=0$;

c. numărul -2 este soluție a ecuației $3x+6=0$;

d. numărul $\frac{1}{2}$ este soluție a ecuației $4x-4=0$;

e. numărul $\sqrt{5}$ este soluție a ecuației $\sqrt{20}x=10$.

6. Precizați care dintre ecuațiile următoare admit soluția 3:

a. $3x=9$; b. $5y-3=12$; c. $\frac{y}{3}+0,5=2$; d. $-\sqrt{3}x+\sqrt{27}=0$; e. $\frac{x}{4}+\frac{1}{4}=-1$.

7. Rezolvați ecuațiile:

a. $2x=6,\ x\in\{-2,-1,0,3\}$; b. $y+2=0,\ y\in\{-1,0,1,2,3\}$; c. $3z-4=0,\ z\in\mathbb{N}$;
d. $-x+0,4=0,\ x\in\mathbb{Q}$; e. $\sqrt{2}a-\sqrt{18}=0,\ a\in\mathbb{N}$; f. $0,5b-\sqrt{2}=0,\ b\in\mathbb{R}$.

8. Rezolvați ecuațiile, apoi verificați soluția găsită:

a. $2x+5=x+7$; b. $x+8=12-x$; c. $5-3x=12-4x$;
d. $2x+1+x=4x-10$; e. $2x+3=2x+8+x$; f. $2(x+4)=16$.

9. Stabiliți dacă următoarele ecuații sunt echivalente:

a. $3(x+1)-2=4,\ x\in\mathbb{R}$, și $2(2x-1)+3=5,\ x\in\mathbb{R}$;

b. $3x+4(x+1)=4(x-1)+5,\ x\in\mathbb{R}$, și $2(x+2)+3(x-2)=3x-6,\ x\in\mathbb{R}$.

10. Rezolvați ecuațiile:

a. $\frac{x}{6}=\frac{5}{2}$; b. $\frac{12}{5}=\frac{2x}{3}$; c. $\frac{x+1}{3}=\frac{7}{2}$; d. $5=\frac{4x-5}{3}$; e. $x-1=\frac{2x+1}{3}$.

11. Rezolvați ecuațiile:

a. $x-0,3=2,5$; b. $3x=1,44$; c. $1,2x+4=2,8$;
d. $2,6-x=1,8$; e. $4,5+3x=-x+9$; f. $3,6(x+1)-1=2x+2,6$.

12. Rezolvați ecuațiile:

a. $\sqrt{3}x=\sqrt{75}$; b. $\sqrt{5}x+2=\sqrt{20}+\sqrt{4}$; c. $2\sqrt{7}x+4=\sqrt{7}x+11$;
d. $\sqrt{12}x+\sqrt{27}x=12+\sqrt{3}x$; e. $\sqrt{2}(x+1)-\sqrt{8}=x(\sqrt{2}-2)$; f. $\sqrt{2}(x-\sqrt{3})=\sqrt{54}+2\sqrt{2}x$.

13. Rezolvați ecuațiile:

a. $\frac{2x-5}{4}-x-\frac{1}{2}=1$; b. $\frac{7x-2}{3}-\frac{2x+1}{2}=x+1$; c. $\frac{3x+1}{2}+2=\frac{3}{2}+\frac{2x-4}{2}$;
d. $\frac{5}{2}(x+1)+1\frac{2}{3}=3\frac{1}{6}$; e. $\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{2}x\right):\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$; f. $1\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\left(\frac{1}{10}x+\frac{1}{10}\right)\right]=5$.

14. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a. $|3x+7|=11$; b. $\frac{8}{x-2}=\frac{6}{x}$; c. $(x-4)\cdot(2x+5)(\sqrt{2}x+\sqrt{18})=0$.

Minitest

1. Dați un exemplu de:
   a. ecuație cu termenul liber egal cu 7;
   b. ecuație în care coeficientul necunoscutei este egal cu -2;
   c. ecuație în care coeficienții sunt numere întregi opuse. (3p)

2. Notați în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect.
   Ecuația $7(x+1)+2(5-x)=5+2(x+3)$ are soluția:
   A. -2; B. -1; C. 1; D. 2. (3p)

3. Rezolvați ecuațiile:
   a. $1,5x+4=x-2$; b. $\frac{x}{2}-5+\frac{x-7}{8}=\frac{1-x}{2}+\frac{x}{4}$; c. $2x(3+\sqrt{2})-6x=\sqrt{50}-\sqrt{2}$. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

2.3

Lecția 3: Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute

Cuvinte-cheie

sistem | echivalent | ecuație | necunoscute | soluție

Ecuația cu două necunoscute

Situație-problemă

Un dreptunghi (care nu este pătrat) are perimetrul egal cu 16 metri. Determinați lungimea și lățimea dreptunghiului știind că, exprimate în metri, acestea sunt:

a. numere naturale; **b.** numere reale.

Rezolvare:

Dacă dreptunghiul are lungimea de L metri, iar lățimea de l metri, atunci $L > l > 0$, iar perimetrul P (exprimat în metri) se obține din relația $P = 2L + 2l$. Așadar, $2(L + l) = 16$, deci $L + l = 8$.

a. Dacă $L, l \in \mathbb{N}$, problema are trei soluții: $L = 7$ m, $l = 1$ m sau $L = 6$ m, $l = 2$ m sau $L = 5$ m, $l = 3$ m.

b. Dacă $L, l \in \mathbb{R}$, există o infinitate de posibilități și anume: $L = 8 - t$ metri și $l = t$ metri, unde t este un număr real astfel încât $0 < t < 4$. De exemplu: $L = 6{,}1$ m, $l = 1{,}9$ m sau $L = 5{,}28$ m, $l = 2{,}72$ m sau $L = 4{,}75$ m, $l = 3{,}25$ m etc.

Ce observăm?

În funcție de mulțimea în care o rezolvăm, ecuația $L + l = 8$ are trei soluții, respectiv o infinitate de soluții.

De reținut

O ecuație de forma $ax + by + c = 0$, unde a, b și c sunt numere reale, cu $a \neq 0$ și $b \neq 0$, se numește *ecuație liniară cu două necunoscute*.

Numerele reale x și y se numesc *necunoscutele* ecuației, numerele a și b se numesc *coeficienți*, iar c se numește *termen liber*.

O pereche (x_0, y_0) de numere reale pentru care egalitatea $ax_0 + by_0 + c = 0$ este adevărată se numește *soluție* a ecuației $ax + by + c = 0$.

A rezolva o ecuație cu două necunoscute înseamnă a determina mulțimea S a soluțiilor ecuației.

O ecuație liniară cu două necunoscute are o infinitate de soluții.

Exemplu

O soluție a ecuației $x + 2y - 5 = 0$ este perechea $(1, 2)$, deoarece $1 + 2 \cdot 2 - 5 = 0$. Perechea $(2, 1)$ nu este soluție, deoarece $2 + 2 \cdot 1 - 5 \neq 0$. Se observă însă că ecuația mai are și alte soluții:

- perechea $(3, 1)$ este soluție, deoarece $3 + 2 \cdot 1 - 5 = 0$;
- perechea $(5, 0)$ este soluție, deoarece $5 + 2 \cdot 0 - 5 = 0$.

Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute

De reținut

Un ansamblu de două ecuații liniare cu două necunoscute, de forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \text{ unde } a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

se numește *sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute*.

Numerele reale a_1, b_1, a_2, b_2 se numesc *coeficienții necunoscutelor*, c_1, c_2 sunt *termenii liberi*, iar x și y sunt *necunoscutele* sistemului.

O pereche (x_0, y_0) de numere reale se numește *soluție* a sistemului dacă este soluție pentru fiecare ecuație a sistemului (altfel spus, este o soluție comună a celor două ecuații ale sistemului).

Exemplu

Considerăm sistemul de două ecuații liniare cu două necunoscute: $\begin{cases} 2x + 5y = 19 \\ 8x - 2y = 10 \end{cases}$.

- Înlocuind necunoscuta x cu 2 și necunoscuta y cu 3 în ecuațiile sistemului, obținem:
  $2 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 19 \Leftrightarrow 19 = 19$ (adevărat), deci perechea (2, 3) este soluție a primei ecuații;
  $8 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 10 \Leftrightarrow 10 = 10$ (adevărat), deci perechea (2, 3) este soluție a celei de-a doua ecuații.
  Așadar, perechea (2, 3) este soluție a sistemului deoarece este soluție a fiecărei ecuații.
- Înlocuind necunoscuta x cu -3 și necunoscuta y cu 5 în ecuațiile sistemului, obținem:
  $2 \cdot (-3) + 5 \cdot 5 = 19 \Leftrightarrow 19 = 19$ (adevărat), deci perechea $(-3, 5)$ este soluție a primei ecuații;
  $8 \cdot (-3) - 2 \cdot 5 = 10 \Leftrightarrow -34 = 10$ (fals), deci $(-3, 5)$ nu este soluție a celei de-a doua ecuații.
  Ca urmare, perechea $(-3, 5)$ nu este soluție a sistemului deoarece nu este soluție a ambelor ecuații ale sistemului (chiar dacă această pereche este totuși soluție a primei ecuații).

De reținut

A rezolva un sistem de ecuații înseamnă a determina mulțimea S a soluțiilor sale.
Mulțimea soluțiilor unui sistem de ecuații este intersecția mulțimilor soluțiilor celor două ecuații.
Două sisteme de ecuații liniare se numesc *echivalente* dacă au aceeași mulțime de soluții.
Transformând una sau ambele ecuații ale unui sistem în ecuații echivalente se obține un sistem echivalent cu sistemul dat. Pentru a exprima faptul că două sisteme sunt echivalente putem folosi simbolul $\Leftrightarrow$ (citit echivalent).

Exemplu: $\begin{cases} 3x + \quad y = 9 \\ 18x + 15y = 81 \mid :3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \quad y = 9 \mid \cdot(-2) \\ 6x + 5y = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 2y = -18 \\ 6x + 5y = 27 \end{cases}.$

Metode de rezolvare a sistemelor de două ecuații cu două necunoscute

Metoda substituției

De reținut

Metoda substituției este o modalitate de rezolvare a unui sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute, care constă în *înlocuirea* unei necunoscute, într-una dintre ecuațiile sistemului, cu expresia ei în funcție de cealaltă necunoscută, dedusă din cealaltă ecuație.

Algoritmul de rezolvare a unui sistem de două ecuații liniare prin metoda substituției

Pasul 1: Dintr-o ecuație a sistemului se alege o necunoscută și se exprimă în funcție de cealaltă.
Pasul 2: În cealaltă ecuație, se înlocuiește (se substituie) necunoscuta aleasă cu expresia sa determinată la Pasul 1 și se obține astfel o ecuație cu o singură necunoscută.
Pasul 3: Se rezolvă ecuația în care s-a efectuat înlocuirea, aflând astfel una dintre necunoscute (una dintre componentele soluției).
Pasul 4: Se înlocuiește valoarea necunoscutei aflate la Pasul 3 în expresia de la Pasul 1 și se determină cealaltă necunoscută (cealaltă componentă a soluției).
Pasul 5: Se scrie mulțimea soluțiilor sistemului.

Verificare. Pentru verificarea corectitudinii calculelor și remedierea eventualelor greșeli, înlocuim componentele soluției obținute în ecuațiile inițiale ale sistemului.

Exemplu

Pentru a rezolva sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$ prin metoda substituției, procedăm astfel:

Pasul 1	Îl exprimăm pe y în funcție de x din a doua ecuație.	$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ y = 7 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow$
Pasul 2	Îl înlocuim pe y cu $7 - 4x$ în prima ecuație, care devine o ecuație de gradul I cu o singură necunoscută (și anume x).	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ y = 7 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3(7 - 4x) = 1 \\ y = 7 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow$

Pasul 3	Rezolvăm această ecuație și aflăm necunoscuta x (o componentă a soluției).	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 21 - 12x = 1 \\ y = 7 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x = -20 \\ y = 7 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 7 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow$
Pasul 4	Înlocuim valoarea găsită pentru x în a doua ecuație și aflăm necunoscuta y (cealaltă componentă a soluției).	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 7 - 4 \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$
Pasul 5	Scriem mulțimea soluțiilor sistemului.	$S = \{(2, -1)\}$

Verificare: Înlocuim componentele soluției obținute în ecuațiile inițiale ale sistemului:
În prima ecuație: $2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 1 \Leftrightarrow 4 - 3 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ (adevărat)
În a doua ecuație: $4 \cdot 2 + (-1) = 7 \Leftrightarrow 8 - 1 = 7 \Leftrightarrow 7 = 7$ (adevărat)

Observații

1. Dacă în urma înlocuirii lui y (sau a lui x), ecuația în necunoscuta x (sau y) nu are soluții, atunci sistemul nu are soluții, deci $S = \varnothing$.
2. Dacă în urma înlocuirii lui y (sau a lui x) se obține o identitate, atunci sistemul se reduce la o singură ecuație, cele două ecuații fiind echivalente. În acest caz, sistemul are o infinitate de soluții.

Metoda reducerii

De reținut

Metoda reducerii este o modalitate de rezolvare a unui sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute, care constă în transformarea uneia sau a ambelor ecuații ale sistemului în ecuații echivalente, astfel încât coeficienții uneia dintre necunoscute să devină opuși (sau egali) în cele două ecuații, urmată de adunarea (respectiv scăderea) membru cu membru a ecuațiilor obținute, astfel încât să se obțină o ecuație cu o singură necunoscută.

Algoritmul de rezolvare a unui sistem de două ecuații liniare prin metoda reducerii

Pasul 1: Se înmulțesc ambii membri ai uneia dintre cele două ecuații cu un număr real nenul și, dacă este cazul, membrii celeilalte ecuații cu un alt număr real nenul, astfel încât coeficienții uneia dintre necunoscute să devină opuși (sau egali).

Pasul 2: Adunăm (respectiv scădem, după caz) cele două ecuații și obținem o ecuație cu o singură necunoscută, pe care o rezolvăm, aflând valoarea acestei necunoscute (una dintre componentele soluției).

Pasul 3: Într-una dintre ecuațiile sistemului, se înlocuiește necunoscuta cu valoarea determinată la pasul al doilea și se rezolvă ecuația obținută, determinând astfel valoarea celei de-a doua necunoscute (cealaltă componentă a soluției).

Pasul 4: Dacă la pașii 2 și 3 se obțin valorile $x = x_0$ și $y = y_0$, unde $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, atunci perechea (x_0, y_0) este soluția sistemului. Scriem mulțimea soluțiilor sistemului: $S = \{(x_0, y_0)\}$.

Verificare: Înlocuim x cu x_0 și y cu y_0 în ecuațiile inițiale ale sistemului și stabilim dacă perechea (x_0, y_0) este soluția sistemului.

Exemplu

Pentru a rezolva sistemul de ecuații $\begin{cases} 5x + 3y = 7 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$ prin metoda reducerii, procedăm astfel:

Pasul 1	Înmulțim a doua ecuație cu -3, pentru ca termenii care îl conțin pe y să se reducă.	$\begin{cases} 5x + 3y = 7 \\ 4x + \ \ y = 7 \,\vert \cdot (-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 3y = 7 \\ -12x - 3y = -21 \end{cases}$
Pasul 2	Adunăm membru cu membru ecuațiile din al doilea sistem și obținem o ecuație cu o singură necunoscută, pe care o rezolvăm.	$-7x = -14 \Leftrightarrow x = 2$
Pasul 3	Înlocuim necunoscuta x cu valoarea obținută la Pasul 2 în a doua ecuație a sistemului inițial și aflăm valoarea lui y.	$4 \cdot 2 + y = 7 \Leftrightarrow 8 + y = 7 \Leftrightarrow y = -1$
Pasul 4	Scriem mulțimea soluțiilor sistemului.	$S = \{(2, -1)\}$.

Verificare: Înlocuim componentele soluției obținute în ecuațiile inițiale ale sistemului:
În prima ecuație: $5 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 7 \Leftrightarrow 10 - 3 = 7 \Leftrightarrow 7 = 7$ (adevărat).
În a doua ecuație: $4 \cdot 2 + (-1) = 7 \Leftrightarrow 8 - 1 = 7 \Leftrightarrow 7 = 7$ (adevărat).

Observații

1. Pentru rezolvarea unui sistem de două ecuații cu două necunoscute, putem alege oricare dintre cele două metode prezentate. Indiferent de metoda aleasă, soluția este aceeași.
2. Un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute poate avea o singură soluție, o infinitate de soluții sau nicio soluție.

Exemple

1. Sistemul $\begin{cases} 3x - 2y = 19 \\ 3x + 3y = 9 \end{cases}$ are soluția unică $S = \{(5, -2)\}$, care se poate determina prin metoda reducerii sau prin metoda substituției.
2. Sistemul $\begin{cases} 3x - 6y = 9 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ are o infinitate de soluții, întrucât cele două ecuații sunt echivalente, iar sistemul se reduce la o ecuație cu două necunoscute, având mulțimea soluțiilor $S = \{(2t + 3, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
3. Sistemul $\begin{cases} 4x + 3y = 17 \\ 8x + 6y = 22 \end{cases}$ nu are soluție, deoarece înmulțind prima ecuație cu 2 și scăzând apoi cea de-a doua ecuație, obținem relația $0 \cdot x + 0 \cdot y = 12$, care nu este verificată de nicio pereche (x, y) de numere reale. Așadar, $S = \varnothing$.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Determinați numărul real t pentru care perechea $(t; t - 2)$ este soluție a ecuației $2x - 3y = 1$.

Rezolvare:
Perechea $(t; t - 2)$ este soluție a ecuației $2x - 3y = 1$ dacă și numai dacă, înlocuind $x = t$ și $y = t - 2$ în ecuația dată, se obține o afirmație adevărată. Obținem succesiv:

$$2t - 3(t - 2) = 1 \Leftrightarrow 2t - 3t + 6 = 1 \Leftrightarrow -t = -5 \Leftrightarrow t = 5.$$

Verificare: Pentru numărul real $t = 5$, perechea $(t; t - 2) = (5; 3)$. Deoarece $2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 10 - 9 = 1$, deducem că perechea $(5; 3)$ este soluție pentru ecuația $2x - 3y = 1$. Deci $t = 5$ convine.

2. Rezolvați sistemele:

a. $\begin{cases} 9x + y = -15 \\ 6x + 5y = 3 \end{cases}$; **b.** $\begin{cases} \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{3} \cdot y = 5 \\ \sqrt{3} \cdot x - \sqrt{2} \cdot y = 0 \end{cases}$; **c.** $\begin{cases} 2(x + 1) - 3(y + 1) = 2 \\ 3(x + y) - 2(y - 1) = 2{,}8(3) \end{cases}$.

Rezolvare:

a. Atunci când una dintre necunoscute are coeficientul 1 sau –1 este preferabil să aplicăm *metoda substituției*.

$9x + y = -15 \Leftrightarrow y = -9x - 15$. Înlocuindu-l pe y cu $-9x - 15$ în a doua ecuație, rezolvăm ecuația obținută:

$6x + 5 \cdot (-9x - 15) = 3 \Leftrightarrow 6x - 45x - 75 = 3 \Leftrightarrow -39x = 78 \Leftrightarrow x = -2$. Reiese că $y = -9 \cdot (-2) - 15 = 18 - 15 = 3$.

Sistemul are soluția unică $S = \{(-2, 3)\}$.

Verificare: $9 \cdot (-2) + 3 = -18 + 3 = -15$ (adevărat), deci $(-2; 3)$ este soluție pentru ecuația $9x + y = -15$.
$6 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 = -12 + 15 = 3$ (adevărat), deci $(-2; 3)$ este soluție pentru ecuația $6x + 5y = 3$.
Fiind soluție pentru ambele ecuații, perechea $(-2; 3)$ este, într-adevăr, soluție a sistemului.

b. Atunci când unii dintre coeficienți sunt numere iraționale este preferabil să aplicăm *metoda reducerii*.

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{3} \cdot y = 5 \quad | \cdot \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \cdot x - \sqrt{2} \cdot y = 0 \quad | \cdot \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \sqrt{6} \cdot y = 5\sqrt{2} \\ 3x - \sqrt{6} \cdot y = 0 \end{cases}.$$

Prin adunare membru cu membru rezultă că $5x = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$. Înlocuind în prima ecuație, obținem:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot y = 5 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{3} \cdot y = 5 \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot y = 3 \Leftrightarrow y = \sqrt{3}.$$

Sistemul are soluția unică $S = \left\{\left(\sqrt{2}; \sqrt{3}\right)\right\}$.

Verificare: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 2 + 3 = 5$, respectiv $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} - \sqrt{6} = 0$.

Fiind soluție pentru ambele ecuații, perechea $\left(\sqrt{2}; \sqrt{3}\right)$ este soluție a sistemului considerat.

c. $\begin{cases} 2(x+1)-3(y+1)=2 \\ 3(x+y)-2(y-1)=2,8(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2-3y-3=2 \\ 3x+3y-2y+2=\frac{283-28}{90} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=3 \\ 3x+y+2=\frac{17}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=3 \\ 3x+y=\frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=3 \\ 9x+3y=\frac{5}{2} \end{cases}$. Adunând membru cu membru, obținem: $11x=\frac{3}{1}+\frac{5}{2} \Leftrightarrow 11x=\frac{11}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$. Înlocuind în ecuația $3x+y=\frac{5}{6}$, obținem $\frac{3}{2}+y=\frac{5}{6} \Leftrightarrow y=\frac{5}{6}-\frac{3}{2} \Leftrightarrow y=\frac{5}{6}-\frac{9}{6} \Leftrightarrow y=-\frac{4}{6} \Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}$.

Așadar, $S=\left\{\left(\frac{1}{2};-\frac{2}{3}\right)\right\}$.

Probleme propuse

1. Precizați care dintre următoarele relații reprezintă ecuații cu două necunoscute:
   a. $x+y=2$; b. $2x+5-7=0$; c. $3y+2y=10$; d. $2a+1{,}5b-2=0$.
2. Verificați dacă perechea (1, 2) este soluție a ecuației:
   a. $x+y-3=0$; b. $2x+y+4=0$; c. $x+3y-7=0$; d. $4x-3y+1=0$.
3. Pentru ecuațiile de forma $ax+by+c=0$, $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$, copiați pe caiet, apoi completați tabelul, conform modelului:

Ecuația	$x-2y-4=0$	$3x+y+1=0$	$-x+\frac{1}{2}y+5=0$	$\sqrt{2}x+2y-\sqrt{3}=0$	$\sqrt{3}x-y=0$
a	1				
b	−2				
c	−4				

4. Se consideră ecuația $x+2y-8=0$.
   a. Scrieți două perechi de numere reale care să fie soluții ale ecuației date.
   b. Scrieți două perechi de numere reale care să nu fie soluții ale ecuației date.
5. Se consideră ecuația $ax+by+4=0$, unde a și b sunt numere reale.
   a. Pentru $a=1$, determinați b astfel încât perechea (2, −3) să fie soluție a ecuației.
   b. Determinați a și b pentru care (−1, −1) și (0, −4) sunt soluții ale ecuației.
6. Precizați care dintre următoarele relații reprezintă sisteme de două ecuații cu două necunoscute:
   a. $\begin{cases} x-1=3 \\ 2x=4 \end{cases}$; b. $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+3y=5 \end{cases}$; c. $\begin{cases} x=5 \\ 2x+3y=16 \end{cases}$; d. $\begin{cases} x^2-9=0 \\ x+3=6 \end{cases}$.
7. Verificați dacă perechea (2, 3) este soluție a sistemului de ecuații:
   a. $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x+4y=14 \end{cases}$; b. $\begin{cases} x+3y=11 \\ 2x+y=10 \end{cases}$; c. $\begin{cases} -x+2y=5 \\ 2x-2y=-2 \end{cases}$; d. $\begin{cases} 0{,}5x+3y=10 \\ 2x-\frac{1}{3}y=3 \end{cases}$.
8. Rezolvați următoarele sisteme de ecuații prin metoda substituției:
   a. $\begin{cases} x+4y=8 \\ 2x+3y=11 \end{cases}$; b. $\begin{cases} -2x+y=-2 \\ 3x-4y=-2 \end{cases}$; c. $\begin{cases} -2x+3y=-2 \\ 3x+y=14 \end{cases}$; d. $\begin{cases} 2x+4y=14 \\ x-2y=5 \end{cases}$.
9. Rezolvați următoarele sisteme de ecuații prin metoda reducerii:
   a. $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$; b. $\begin{cases} -x+2y=-1 \\ -2x+3y=3 \end{cases}$; c. $\begin{cases} 2x+4y=-4 \\ -3x+5y=-16 \end{cases}$; d. $\begin{cases} 5x+3y=4 \\ 2x+4y=10 \end{cases}$.

10. Rezolvați următoarele sisteme de ecuații:

a. $\begin{cases} \frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y=3 \\ \frac{2}{3}x-\frac{3}{5}y=-1 \end{cases}$; **b.** $\begin{cases} 0{,}5x+0{,}2y=0 \\ 1{,}5x-y=6 \end{cases}$; **c.** $\begin{cases} 3(x-2)+0{,}25y=-1 \\ \frac{x+2}{4}+\frac{5y}{18}=-0{,}(1) \end{cases}$; **d.** $\begin{cases} 2(x+1)+y=6 \\ x-2(y+1)=-20 \end{cases}$.

11. Scrieți un sistem cu două ecuații cu coeficienți reali și două necunoscute care să aibă soluția unică:

a. $x=2$ și $y=5$; **b.** $x=-1$ și $y=\sqrt{3}$; **c.** $x=0$ și $y=-\sqrt{2}$; **d.** $x=1-\sqrt{3}$ și $y=0$.

12. Determinați mulțimea soluțiilor următoarelor sisteme de ecuații, în mulțimea numerelor reale:

a. $\begin{cases} x-2y=-3 \\ -2x+4y=6 \end{cases}$; **b.** $\begin{cases} x-2y=-3 \\ 2x-4y=6 \end{cases}$; **c.** $\begin{cases} \sqrt{6}x-\sqrt{2}y=2\sqrt{2} \\ -\sqrt{3}x+y=-2 \end{cases}$; **d.** $\begin{cases} 0{,}4x-3{,}2y=7 \\ 0{,}1x-0{,}8y=1{,}8 \end{cases}$.

13. Determinați numerele întregi k și n, astfel încât $|2k-3n|+(-k+2n)^2=1$.

14. Rezolvați următoarele sisteme de două ecuații:

a. $\begin{cases} \sqrt{2}x+5y=15 \\ \sqrt{8}x+2y=6 \end{cases}$; **b.** $\begin{cases} \sqrt{3}\,x+\sqrt{18}\,y=9 \\ \sqrt{12}\,x+\sqrt{2}\,y=8 \end{cases}$; **c.** $\begin{cases} \sqrt{63}\,x-\sqrt{3}\,y=30 \\ \sqrt{7}\,x+\sqrt{27}\,y=50 \end{cases}$; **d.** $\begin{cases} \sqrt{5}\,x+3y=5-\sqrt{27} \\ \sqrt{10}\,x-\sqrt{12}\,y=5\sqrt{2}+6 \end{cases}$.

Minitest

1. Verificați dacă perechea (2, 4) este soluție a:

a. ecuației $2x+y-9=0$; **b.** sistemului de ecuații $\begin{cases} 3x-y=2 \\ 2x+5y=24 \end{cases}$. **(3p)**

2. Soluția sistemului de ecuații $\begin{cases} 4x+3y=2 \\ x-2y=6 \end{cases}$ este:

A. $S=\{(2, 2)\}$; **B.** $S=\{(-2, 2)\}$; **C.** $S=\{(2, -2)\}$; **D.** $S=\{(-2, -2)\}$. **(3p)**

Notați în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect.

3. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} 2(x-1)+3y=-5 \\ 4x+3(y+2)=-3 \end{cases}$.

a. Rezolvați sistemul de ecuații prin metoda substituției.

b. Rezolvați sistemul de ecuații prin metoda reducerii. **(3p)**

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Lecția 4: Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau al sistemelor de ecuații liniare

Cuvinte-cheie

problemă | necunoscute | ecuație | sistem | soluție

În problemele practice, relațiile care intervin între datele cunoscute și cele necunoscute se pot exprima adeseori prin una sau mai multe ecuații liniare. Astfel, determinarea soluției problemei revine la rezolvarea unei ecuații sau a unui ansamblu de ecuații (adică un sistem).

De reținut

Strategia de utilizare a ecuațiilor și sistemelor în rezolvarea problemelor presupune parcurgerea cu atenție a următoarelor etape:

1. Se identifică datele cunoscute, cerința problemei și se stabilesc mărimile necunoscute.
2. Se notează mărimile necunoscute cu litere și se precizează mulțimea căreia îi aparțin.
3. Se transpun în limbaj matematic relațiile dintre valorile mărimilor necunoscute, folosind una sau mai multe ecuații (un sistem) care formează modelul matematic al problemei.
4. Se rezolvă modelul matematic (ecuația, respectiv sistemul de ecuații).
5. Se interpretează practic rezultatele obținute și se formulează soluția problemei.
6. Folosind ipoteza problemei, se verifică soluția găsită.

Situație-problemă

Din suma pe care o administra, un broker a investit 60% în titluri de stat și 25% în acțiuni. I-au rămas 12 000 de lei. Ce sumă administra, inițial, brokerul respectiv?

Rezolvare:

Notăm cu s suma (exprimată în lei) pe care a avut-o inițial. În titluri de stat a investit $60\% \cdot s$, iar în acțiuni a investit $25\% \cdot s$. Obținem ecuația

$s = 60\% \cdot s + 25\% \cdot s + 12\,000$ lei. Deoarece $s = 1 \cdot s = \frac{100}{100} \cdot s = 100\% \cdot s$,

putem scrie: $100\% \cdot s = (60\% + 25\%) \cdot s + 12\,000 \Leftrightarrow 100\% \cdot s = 85\% \cdot s + 12\,000 \Leftrightarrow 15\% \cdot s = 12\,000 \Leftrightarrow s = 12\,000 : 15\% \Leftrightarrow s = 12\,000 : \frac{15}{100} \Leftrightarrow s = 12\,000 \cdot \frac{100}{15} \Leftrightarrow s = 80\,000$, deci la început, brokerul a avut în administrare suma de 80 000 de lei.

Verificăm soluția găsită. În titluri de stat a investit $60\% \cdot 80\,000$ lei $= \frac{60}{100} \cdot 80\,000$ lei $= 48\,000$ lei, iar în acțiuni a investit $25\% \cdot 80\,000$ lei $= \frac{25}{100} \cdot 80\,000$ lei $= 20\,000$ lei.

I-au rămas 80 000 lei – 48 000 lei – 20 000 lei = 12 000 lei, ceea ce validează corectitudinea rezolvării.

Situație-problemă

Vlad și Tavi au fost la supermarket pentru a cumpăra mere și portocale. Niciunul dintre ei nu a păstrat bonul.
Vlad spune: „Pentru 2 kilograme de mere și 4 kilograme de portocale am plătit 22 de lei.”
Tavi afirmă: „Am cumpărat 3 kilograme de mere și 2 kilograme de portocale, pentru care am plătit 17 lei.”
Considerând afirmațiile lor adevărate, determinați cât costă un kilogram de mere și cât costă un kilogram de portocale.

Rezolvare:
Notăm cu x (lei) prețul unui kilogram de mere și cu y (lei) prețul unui kilogram de portocale.
Afirmația lui Vlad arată că are loc egalitatea $2x + 4y = 22$, iar cea a lui Tavi că $3x + 2y = 17$. Putem forma astfel un sistem de două ecuații cu două necunoscute, pe care îl rezolvăm, de exemplu, prin *metoda reducerii*:

$$\begin{cases} 2x+4y=22 \\ 3x+2y=17 \,\big|\cdot(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y= \ \ 22 \\ -6x-4y=-34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y= \ \ 22 \\ -4x \qquad =-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=22 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 2\cdot 3+4y=22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}.$$

$$\overline{-4x \qquad =-12}$$

Așadar, un kilogram de mere costă 3 lei, iar un kilogram de portocale costă 4 lei.

Verificare: $3 \cdot 3$ lei $+ 2 \cdot 4$ lei $= 17$ lei, iar $2 \cdot 3$ lei $+ 4 \cdot 4$ lei $= 22$ lei.

Situație-problemă

O gospodină are la dispoziție o saramură cu concentrația de 25% și o saramură cu concentrația de 30%. Câți litri trebuie să amestece din fiecare soluție pentru a obține 20 de litri de saramură cu concentrația de 28%?

Rezolvare:

Vom aplica media aritmetică ponderată: $c.a. = \dfrac{c_1 \cdot x + c_2 \cdot y}{x+y}$, unde x reprezintă cantitatea de soluție cu concentrația c_1, y cantitatea de soluție cu concentrația c_2, iar $c.a.$ reprezintă concentrația amestecului. Obținem sistemul:

$$\begin{cases} x+y=20 \\ 28\% = \dfrac{25\%\cdot x + 30\%\cdot y}{x+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=20 \\ 25\%\cdot x+30\%\cdot y=28\%(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=20 \\ 25x+30y=28\cdot 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=20 \\ 5x+6y=112 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x-5y=-100 \\ \ \ 5x+6y= \ \ 112 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=20 \\ y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=12 \end{cases}.$$

Gospodina trebuie să amestece 8 litri cu concentrația de 25% cu 12 litri cu concentrația de 30%.

Gândire critică
(rezolvare comparativă cu ajutorul unei ecuații/unui sistem de ecuații)

În *Săptămâna Verde*, cei 27 de elevi ai unei clase și-au propus să participe la o acțiune de curățare a unei zone poluate. În ziua respectivă au participat la acțiune încă 3 prieteni: o fată și doi băieți. Astfel, numărul băieților a devenit două treimi din numărul fetelor. Câți băieți și câte fete erau în clasa respectivă?

Rezolvare cu ajutorul unei ecuații:
Notăm cu $x \in \mathbb{N}^*$ numărul băieților din clasă.
Atunci numărul fetelor este egal cu $27 - x$.
Deoarece s-au alăturat încă o fată și doi băieți, deducem că numărul băieților care au participat la acțiune a fost egal cu $x + 2$, iar cel al fetelor a fost egal cu $28 - x$.
Obținem ecuația $x+2=\dfrac{2}{3}\cdot(28-x)$, pe care o rezolvăm pentru a determina necunoscuta x:

$x+2=\dfrac{2}{3}\cdot(28-x)\,\big|\cdot 3 \Leftrightarrow 3\cdot(x+2) = 2\cdot(28-x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x + 6 = 56 - 2x \Leftrightarrow 5x = 50 \Leftrightarrow x = 10$.
Așadar, în clasă erau 10 băieți și $27 - 10 = 17$ fete.

Rezolvare cu ajutorul unui sistem de ecuații:
Notăm cu f numărul fetelor și cu b numărul băieților din clasă, unde $f, b \in \mathbb{N}^*$. Atunci $f + b = 27$.
La acțiune au participat încă o fată și doi băieți, deci au fost în total $f + 1$ fete, respectiv $b + 2$ băieți.
Obținem sistemul:

$$\begin{cases} f+b=27 \\ b+2=\dfrac{2}{3}\cdot(f+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f=27-b \\ 3\cdot(b+2)=2\cdot(f+1) \end{cases}.$$

Înlocuindu-l pe f cu $27 - b$ în cea de-a doua ecuație, obținem: $3b + 6 = 54 - 2b + 2 \Leftrightarrow 5b = 50 \Leftrightarrow b = 10$.
Ca urmare, $f = 27 - b = 27 - 10 = 17$.
În clasă erau 10 băieți și 17 fete.

Verificare: $10 + 17 = 27$; $10 + 2 = 12$; $17 + 1 = 18$, respectiv $\dfrac{2}{3}\cdot 18 = 2\cdot 6 = 12$.

Proiect

Odată cu cele învățate în această lecție, pentru rezolvarea problemelor avem la dispoziție o serie întreagă de strategii și metode, pe care le putem grupa în următoarele două categorii:
- metode aritmetice: metoda reducerii la unitate, metoda comparației, metoda figurativă, metoda mersului invers, metoda falsei ipoteze;
- metode algebrice: utilizarea ecuațiilor și a sistemelor de ecuații.

Temă de proiect

I. Pentru fiecare dintre problemele 1-4, prezentate în continuare, redactați două soluții: una prin metode aritmetice, iar cealaltă prin metode algebrice. Analizați, prin comparație, cele două rezolvări și precizați avantajele, respectiv dezavantajele fiecărei metode de rezolvare, din perspectivă proprie.

În analiză puteți să aveți în vedere următoarele aspecte:
- rapiditatea rezolvării;
- cât de ușor se face verificarea;
- cât de ușor se poate prezenta soluția (eventual oral), unui interlocutor.

II. Compuneți două probleme, una în care să apară o singură mărime necunoscută, iar alta în care să apară două mărimi necunoscute, și rezolvați-le prin metoda preferată.

Pentru realizarea proiectului, se formează echipe de câte 4-5 elevi.
Resurse: se pot folosi cele oferite public pe internet.
Prezentare: realizați o prezentare PowerPoint, cu text și imagini.
Evaluare: se va ține cont de calitatea analizei, originalitatea și calitatea problemelor propuse, acuratețea prezentării, modul de lucru în echipă, opiniile exprimate de colegi în urma prezentării proiectului și calitatea răspunsurilor oferite la întrebările acestora.

1. George are 30 de ani, iar fiica lui, Adina, are 4 ani.

a. Este posibil ca, peste un anumit număr de ani, George să aibă cu un an mai mult decât triplul vârstei Adinei? Justificați răspunsul dat.
b. Determinați peste câți ani vârsta Adinei va reprezenta o treime din vârsta tatălui ei.

Metodele de rezolvare pe care le veți utiliza la punctul b:
- metoda figurativă;
- rezolvarea cu ajutorul unei ecuații.

2. La o librărie, orice coală de hârtie colorată avea același preț. De asemenea, orice cariocă avea același preț. Pentru a cumpăra materiale necesare pentru un proiect, Adi și Eva au mers la această librărie. Băiatul a cumpărat 4 coli de hârtie colorată și 7 carioci, pentru care a plătit 47 de lei. Eva a cumpărat 6 coli de hârtie colorată și 5 carioci, pentru care a plătit 43 de lei. Determinați cât a costat o coală de hârtie și cât a costat o cariocă.

Metodele de rezolvare pe care le veți utiliza:
- metoda comparației;
- cu ajutorul unui sistem de ecuații, prin metoda reducerii.

3. Un bilet la teatru costă 55 de lei, iar un bilet la cinema costă 32 de lei. Radio Mate oferă, din partea unui sponsor, 12 bilete câștigătorilor unui concurs, în valoare totală de 545 de lei. Câte bilete din fiecare fel au fost oferite?

Metodele de rezolvare pe care le veți utiliza:
- metoda falsei ipoteze;
- cu ajutorul unui sistem de ecuații, prin metoda substituției.

4. Iulia a cheltuit o sumă de bani în trei zile. În prima zi a cheltuit 30% din sumă, în a doua zi a cheltuit două cincimi din suma rămasă, iar în a treia zi a cheltuit restul de 630 de lei.

a. Este posibil ca suma inițială să fie egală cu 1 200 de lei? Justificați răspunsul dat.
b. Determinați ce sumă a avut Iulia inițial.

Metodele de rezolvare pe care le veți utiliza la punctul b:
- metoda mersului invers;
- rezolvarea cu ajutorul unei ecuații.

Investigație

Pragul de rentabilitate într-o afacere prin care se comercializează ouă

Etapa I

Planul afacerii tale este să crești 15 găini dintr-o anumită rasă în curtea familiei și să vinzi ouăle produse. Pentru demararea afacerii, costul este de 825 de lei pentru un coteț de păsări și 25 de lei pentru fiecare găină. Hrana pentru găini va costa 10 lei pe zi și speri că fiecare găină va oua zilnic un ou. Îți propui să vinzi fiecare ou cu un leu.

Afacerea ta atinge pragul de rentabilitate când vânzările totale sunt egale cu cheltuielile totale.

1. În câte zile vei atinge pragul de rentabilitate?
   (Presupui că vei reuși să vinzi toate ouăle, fără să se piardă vreunul).
2. Folosind cunoștințele învățate în clasa a V-a, trasează un grafic cu linii pentru a arăta cum vor evolua costurile și profitul în primele 80 de zile.

Etapa a II-a

După ce te documentezi mai bine, afli că găinile din această rasă fac ouă în doar patru zile din cinci, dar afli că poți cumpăra găini speciale, din altă rasă, la prețul de 45 de lei fiecare, care nu doar că vor face câte un ou în fiecare zi, dar la fiecare patru zile vor face câte două ouă pe zi. Le-ai expus părinților planul tău și ai primit cadou suma de 1440 de lei pentru a cumpăra cotețul și 15 găini. Determină câte găini din fiecare rasă poți cumpăra.

Extindere

1. Sora ta nu este foarte încântată de faptul că doar tu folosești curtea pentru afacere și îți solicită 10% din profit. Ținând cont de acest lucru, calculează ce sumă vei câștiga în 365 de zile.
2. De ziua ta primești 1 490 de lei. Vei câștiga mai mult în primul an, care nu este bisect, dacă mai cumperi un coteț și 15 găini, sau dacă îi investești cu un profit de 6%? Dacă ai primi o sumă diferită de bani, investighează cum ți-ar determina aceasta cea mai bună opțiune.

Extindere +

Gândește-te la o afacere și descrie costurile și prețurile produselor și serviciilor. Calculează când vei atinge pragul de rentabilitate.

Schimbă planul de afaceri cu un coleg și încercați fiecare dintre voi să concepeți schimbări care ar afecta afacerea celuilalt. Investighează felul în care schimbările propuse de colegul tău îți vor afecta profiturile și momentul în care vei atinge pragul de rentabilitate.

Probleme propuse

1. Clubul *Prietenii muntelui* are 45 de membri, care sunt fie alpiniști, fie schiori. Numărul schiorilor este cu 23 mai mare decât numărul alpiniștilor. Determinați numărul alpiniștilor din club.
2. Un număr de două cifre în baza 10 are cifra zecilor de două ori mai mare decât cifra unităților. Determinați acest număr, știind că suma cifrelor sale este egală cu 12.
3. Un număr se mărește cu 4, iar rezultatul se mărește de 5 ori. Noul rezultat micșorat cu 5 se împarte la 4 și se obține câtul 2 533 și restul 3. Determinați numărul inițial.
4. Diferența a două numere naturale este egală cu 392. Împărțind numărul mai mare la numărul mai mic obținem câtul 12 și restul 7. Determinați cele două numere.
5. Peste 15 ani vârsta Anei va fi de 4 ori mai mare decât vârsta pe care a avut-o Ana acum 6 ani. Ce vârstă are Ana acum?
6. Într-un bloc de locuințe sunt 118 camere, repartizate în 50 de apartamente cu două, respectiv cu 3 camere.
   a. Este posibil ca în bloc să fie 28 de apartamente cu trei camere? Justificați răspunsul dat.
   b. Determinați numărul apartamentelor cu două, respectiv cu trei camere din acel bloc.
7. În cadrul unui proiect ecologic, o școală a colectat 8 containere cu maculatură și 5 containere cu plastic, care cântăresc împreună 918 kilograme. Patru containere cu maculatură cântăresc tot atât cât 6 containere cu plastic. Determinați cât cântărește un container cu maculatură, respectiv un container cu plastic.
8. Șase carași aurii și 8 pești-păun costă 124 de lei, iar patru carași aurii și 7 pești-păun costă 101 lei. Dacă fiecare caras auriu, respectiv fiecare pește-păun are același preț, determinați cât costă un pește-păun.

9. Dacă elevii unei clase s-ar așeza câte doi în bancă, atunci două bănci ar rămâne libere, iar un elev ar sta singur în bancă. Dacă aceiași elevi s-ar așeza câte trei în bancă, atunci ar rămâne șapte bănci libere.
   a. Este posibil ca în acea clasă să fie 25 de elevi și 15 bănci? Justificați răspunsul dat.
   b. Câți elevi și câte bănci sunt în clasa respectivă?
10. La un concurs de matematică au fost propuse 10 probleme. Pentru fiecare rezolvare corectă se acordă 10 puncte, iar pentru fiecare rezolvare eronată se scad două puncte. Ilie a primit 76 de puncte. Determinați numărul problemelor rezolvate corect de către Ilie la acel concurs.
11. Paul a cumpărat 40 de acțiuni: o parte dintre acestea la o fabrică textilă, cu 15 euro bucata, iar altele, la o fabrică de pâine, cu 12 euro bucata, achitând în total 552 de euro. Câte acțiuni de fiecare fel a cumpărat?
12. La un magazin s-au adus tricouri pentru vânzare. În prima zi s-au vândut 30% din tricouri, a doua zi s-au vândut două șeptimi din tricourile rămase, iar a treia zi s-au vândut cele 30 de tricouri rămase. Câte tricouri s-au adus pentru vânzare la acel magazin?
13. Un turist a parcurs un traseu în trei zile. În prima zi a parcurs un sfert din lungimea traseului și încă 4 km. A doua zi a parcurs trei cincimi din restul traseului, iar a treia zi a parcurs restul distanței, adică 8 km.
   a. Este posibil ca distanța parcursă în a doua zi să fie egală cu 15 km? Justificați răspunsul dat.
   b. Determinați lungimea traseului parcurs.
14. O veveriță parcurge distanța vizuină–alun–vizuină în 4 minute. Fără alune, ea aleargă cu 6 metri pe secundă, iar cu alune aleargă cu 3 metri pe secundă. Determinați distanța de la vizuină la alun.
15. Un tren lung de 35 dam intră pe un pod. Ultimul vagon iese de pe pod după 7 minute. Dacă viteza era cu 100 m pe minut mai mare, atunci ultimul vagon ar fi ieșit de pe pod după 6 minute. Ce lungime are podul?
16. Un farmacist are două sticle cu soluție de acid boric: una cu concentrația de 6% și alta cu concentrația de 3%. Determinați câți mililitri din fiecare soluție trebuie să amestece farmacistul pentru a obține 600 de mililitri de soluție cu concentrația de 4%.
17. Printr-un sondaj de opinie s-a observat că două treimi dintre consumatori preferă produsul Y și restul produsul X. După o campanie publicitară pentru produsul X, un nou sondaj în rândul acelorași consumatori a arătat că o cincime dintre consumatorii care preferau inițial produsul Y aleg acum produsul X. După ultimul sondaj, numărul celor care au preferat produsul X este cu 60 mai mic decât al celor care au preferat produsul Y. Câți consumatori au participat la acel sondaj?
18. Împărțind numărul $\overline{abc}$, scris în baza 10, la numărul $\overline{ac}$, obținem câtul 8 și restul 1.
   a. Este posibil ca $\overline{ac}$ să fie egal cu 25? Justificați răspunsul dat.
   b. Determinați numerele $\overline{abc}$.
19. Cu ocazia zilei de 8 Martie, Dan a cumpărat 3 buchete de garoafe și 7 buchete de lalele, în total 56 de fire. Fiecare buchet de garoafe avea același număr de fire, număr prim, și, de asemenea, fiecare buchet de lalele avea același număr de fire, număr prim. Determinați numărul garoafelor din fiecare buchet.
20. Compuneți trei probleme astfel: una să se rezolve cu ajutorul unei ecuații, iar celelalte două să se rezolve cu ajutorul unui sistem de ecuații prin *metoda substituției*, respectiv prin *metoda reducerii*.

Autoevaluare

1. Într-o clasă sunt 28 de elevi. Numărul fetelor este de trei ori mai mare decât numărul băieților. Câte fete și câți băieți sunt în clasă? (3p)
2. La o florărie, 7 fire de lalele și 3 fire de trandafiri costă 55 de lei, iar 5 fire de lalele și 7 fire de trandafiri costă 83 de lei.
   a. Este posibil ca un fir de trandafir să coste 12 lei? Justificați răspunsul dat.
   b. Determinați prețul unui fir de trandafir și prețul unui fir de lalea. (3p)
3. Alex a cheltuit o sumă de bani în patru zile. În prima zi a cheltuit 25% din întreaga sumă, în a doua zi 35% din suma rămasă, în a treia zi cu 8 lei mai puțin decât în a doua zi, iar în a patra zi a cheltuit restul de 62 de lei. Determină suma de bani cheltuită de Alex în cele patru zile. (3p)

Notă. Se alocă 1,5 puncte pentru fiecare subpunct rezolvat corect. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Recapitulare și evaluare

Egalități • Ecuații cu o necunoscută • Ecuații cu două necunoscute • Sisteme de ecuații • Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau al sistemelor de ecuații

Pentru problemele 1-9, notați în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect. Pentru exercițiile 10-17, scrieți rezolvările complete.

1. $\sqrt{12}$ este egal cu:

a. 6; **b.** $2\sqrt{3}$; **c.** $\sqrt{6}$; **d.** $\sqrt{3}$.

2. Dacă $a+b=5$, atunci $3a+3b$ este egal cu:

a. 5; **b.** 10; **c.** 15; **d.** 20.

3. Soluția ecuației $2x-6=0$ este numărul:

a. 1; **b.** 2; **c.** 3; **d.** 4.

4. Numărul -2 este soluție a ecuației:

a. $2x+1=0$; **b.** $3x=6$;

c. $x-2=0$; **d.** $3x+6=0$.

5. Un exemplu de ecuație cu două necunoscute este:

a. $x+2y=2$; **b.** $3a+5=8$;

c. $4y^2=9$; **d.** $4+5=9$.

6. O soluție a ecuației $2x+y-4=0$ este perechea:

a. (3, 0); **b.** (2, 1); **c.** (0, 2); **d.** (1, 2).

7. Suma dintre un număr și dublul lui este 24. Numărul considerat este:

a. 6; **b.** 7; **c.** 8; **d.** 9.

8. Dacă $0,5x=8$, atunci x este egal cu:

a. 4; **b.** 8; **c.** 12; **d.** 16.

9. Fie sistemul $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x+1,5y=5\\ -3x+y=13\end{cases}$, unde $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$.

Soluția sistemului este:

a. $(-3; 2)$; **b.** $(3; 4)$; **c.** $(-3; 4)$; **d.** $(3; -4)$.

10. Precizați care dintre enunțurile de mai jos este adevărat și care este fals:

a. 5 este soluție a ecuației $2(x+3)-5=x+6$.

b. Perechea (1, 2) este soluție a ecuației $3x-2y+2=0$.

c. -2 este soluție a ecuației $|4x+7|=1$.

11. Asociați fiecărei ecuații din coloana **A** soluția din coloana **B**:

A	B
i. $3x-8=5x+10$	**a.** 14
ii. $\dfrac{x}{4}=\dfrac{7}{2}$	**b.** -9
iii. $1,2x-4=2$	**c.** 0,5
	d. 5

12. Rezolvați sistemul de ecuații:

$\begin{cases}2x+5y=17\\ -3x+4y=9\end{cases}$, unde $x, y\in\mathbb{R}$.

13. O bluză se ieftinește cu 10%, ajungând să coste 135 de lei. Care a fost prețul bluzei înainte de ieftinire?

14. Diferența a două numere este 75. Suma dintre primul număr și dublul celui de-al doilea este 210. Care sunt cele două numere?

15. La o expoziție sunt 65 de mașini și motociclete. Știind că în total sunt 210 roți, determinați câte mașini și câte motociclete sunt expuse.

16. În vacanța de iarnă, cei 27 de elevi ai clasei a VII-a A merg la schi, în tabăra de la Straja. Lor li se alătură un băiat și patru fete de la clasa a VII-a B, astfel că numărul băieților care merg în tabără reprezintă trei cincimi din numărul fetelor.

a. Este posibil ca în clasa a VII-a A numărul fetelor să fie egal cu 15? Justificați răspunsul dat.

b. Câți băieți sunt în clasa a VII-a A?

17. Un turist a parcurs un traseu montan în patru zile. În prima zi a parcurs 25% din lungimea traseului, în a doua zi o treime din rest, în a treia zi cu 1 km mai mult decât a doua zi, iar în a patra zi restul de 4 km.

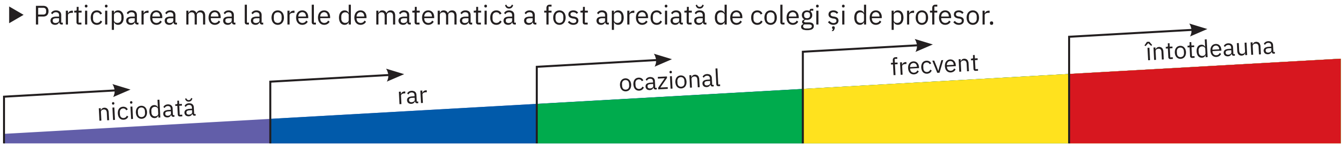
a. Verificați dacă turistul a parcurs în a doua zi un sfert din lungimea traseului. Justificați răspunsul dat.

b. Determinați lungimea traseului parcurs în total în cele patru zile.

Fișa de observare sistematică

▶ Am fost preocupat să aflu lucruri noi despre metodele de rezolvare a problemelor.

▶ Participarea mea la orele de matematică a fost apreciată de colegi și de profesor.



U3 Elemente de organizare a datelor

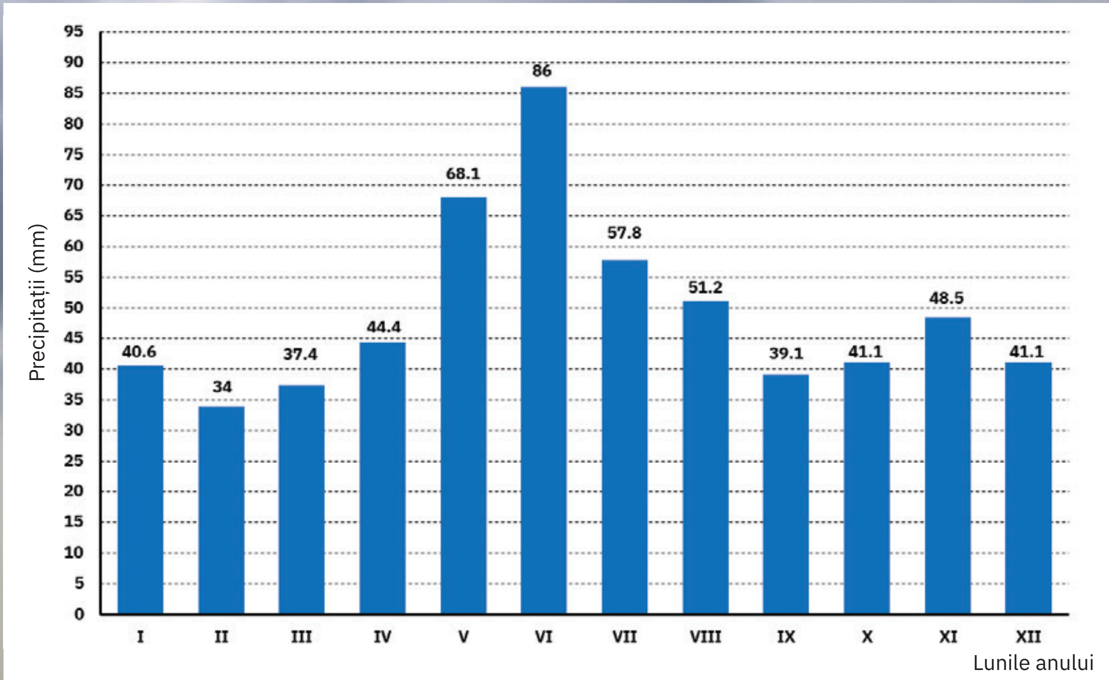
Lecția 1

Produsul cartezian a două mulțimi nevide. Sistem de axe ortogonale în plan.
Reprezentarea într-un sistem de axe ortogonale a unor perechi de numere reale.
Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale.
Distanța dintre două puncte în plan

Lecția 2

Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice. Poligonul frecvențelor

Recapitulare și evaluare



Cantitățile lunare de precipitații la stația București-Filaret, medii multianuale

Prezentarea vizuală a datelor ne ajută să înțelegem cantități mari de date, tendințe și relații între date. Folosirea graficelor în viața de zi cu zi este utilă pentru realizarea analizelor și luarea rapidă a deciziilor. Graficul mediilor multianuale de precipitații înregistrate ne arată evoluția climei din România: perioadele de secetă s-au lungit, iar cantitățile de precipitații au crescut.

3.1

Lecția 1: Produsul cartezian a două mulțimi nevide. Sistem de axe ortogonale în plan. Reprezentarea într-un sistem de axe ortogonale a unor perechi de numere reale. Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale. Distanța dintre două puncte în plan

Cuvinte-cheie

produs cartezian | perechi de numere | distanță | sistem de axe | puncte

Produsul cartezian a două mulțimi nevide

Situație-problemă

Vlad are două zaruri, unul galben și unul roșu. Se pune problema: câte perechi de numere pot să apară la aruncarea celor două zaruri?

De exemplu, dacă pe zarul galben apare fața cu un punct, pe cel roșu poate să apară fața cu un punct, sau fața cu 2 puncte, sau cu 3, cu 4, cu 5 sau cu 6 puncte. Putem forma deci 6 perechi în care zarul galben indică un punct. La fel, dacă zarul galben indică două puncte, se pot forma tot 6 perechi.

Cum zarurile au câte 6 fețe, înseamnă că în total se pot obține $6 \cdot 6 = 36$ de perechi.

Ce observăm?

Aruncând două zaruri se pot obține 36 de perechi de numere. În fiecare pereche, primul număr reprezintă punctele apărute pe primul zar, iar al doilea număr reprezintă punctele apărute pe cel de al doilea zar.

De reținut

Fiind date două mulțimi nevide A și B, prin notația (a, b) se înțelege o pereche ordonată de elemente care are primul element din mulțimea A și al doilea din mulțimea B.

Se numește *produs cartezian* a două mulțimi A și B mulțimea tuturor perechilor ordonate (a, b), unde $a \in A$ și $b \in B$. Scriem

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}.$$

Exemple

1. Dacă $A = \{x, y\}$ și $B = \{m\}$, atunci putem forma următoarele perechi ordonate, în care primul element este din mulțimea A, iar al doilea din mulțimea B: (x, m), (y, m).
   Perechile ordonate în care primul element este din mulțimea B, iar al doilea din mulțimea A sunt: (m, x), (m, y).
   Atunci $A \times B = \{(x, m), (y, m)\}$, iar $B \times A = \{(m, x), (m, y)\}$.
   Observăm că mulțimea A are două elemente, mulțimea B are un element, iar mulțimile $A \times B$ și $B \times A$ au câte două elemente. Altfel spus, $\text{card}\,A = 2$, $\text{card}\,B = 1$, iar $\text{card}(A \times B) = 2 \cdot 1$ și $\text{card}(B \times A) = 1 \cdot 2$.
2. Dacă $A = \{1, 2\}$ și $B = \{0, 1, 3\}$, atunci putem forma următoarele perechi ordonate, în care primul element este din mulțimea A, iar al doilea din mulțimea B: $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$.
   Perechile ordonate în care primul element este din mulțimea B, iar al doilea din mulțimea A sunt: $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$. Așadar: $A \times B = \{(1, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 3)\}$,
   $B \times A = \{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 2)\}$.
   Observăm că mulțimea A are două elemente, mulțimea B are trei elemente, iar mulțimile $A \times B$ și $B \times A$ au câte șase elemente. Altfel spus, $\text{card}\,A = 2$, $\text{card}\,B = 3$, iar $\text{card}(A \times B) = 2 \cdot 3 = 6$ și $\text{card}(B \times A) = 3 \cdot 2 = 6$.

Observații

1. Perechile ordonate (a, b) și (c, d) sunt egale dacă și numai dacă $a = c$ și $b = d$.
2. Într-o pereche ordonată, contează ordinea scrierii elementelor. Mai exact, avem:
   a. dacă $a \neq b$, atunci $(a, b) \neq (b, a)$;
   b. dacă $A \neq B$, atunci $A \times B \neq B \times A$;

   $(a, b) \neq (b, a)$ și $A \times B \neq B \times A$.
3. Dacă mulțimile A și B au un număr finit de elemente, iar $\text{card}\,A = m$ și $\text{card}\,B = n$, atunci $\text{card}(A \times B) = m \cdot n$.

Sistem de axe ortogonale. Reprezentarea într-un sistem de axe ortogonale a unor perechi de numere reale. Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale

Situație-problemă

Se consideră desenele următoare:

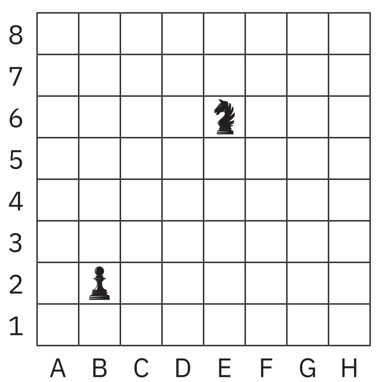


Figura 1

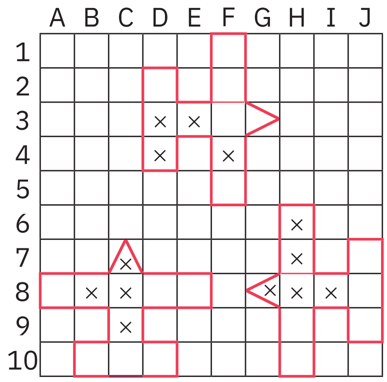


Figura 2

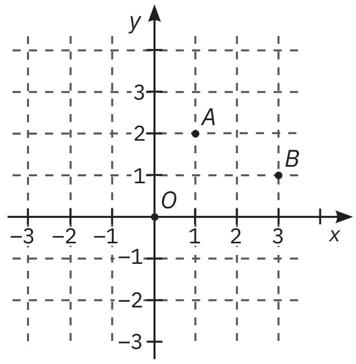


Figura 3

a. Care sunt pozițiile pieselor de șah din Figura 1?
b. Luca și Vlad joacă „Avioane”. Tabla de joc a lui Luca este afișată în Figura 2. Două avioane sunt deja „lovite” în cabina pilotului. Ce „lovitură” ar trebui să dea Vlad ca să câștige?
c. Puteți caracteriza pozițiile punctelor *A* și *B* din Figura 3?

Răspuns:
a. Pionul este pe pătrățelul B2, iar calul pe pătrățelul E6.
b. Pentru a câștiga, Vlad trebuie să „lovească” vârful ultimului avion rămas, adică G3.
c. Punctele *A* și *B* nu sunt situate nici pe dreapta *Ox*, nici pe dreapta *Oy*. Observăm că punctul *A* este situat la intersecția dintre paralela la dreapta *Oy* ce trece prin punctul de coordonată 1 de pe *Ox*, cu paralela la *Ox* ce trece prin punctul de coordonată 2 de pe *Oy*. Astfel putem spune că lui *A* îi corespunde perechea (1, 2). Procedând în același mod, lui *B* îi corespunde perechea (3, 1).

Ce observăm?
În practică, suntem uneori în situația de a stabili poziția unor obiecte, puncte etc. Am învățat că, dacă pe o dreaptă fixăm o origine, un sens și o unitate de măsură, oricărui număr real îi putem asocia un punct de pe dreaptă. Reciproc, poziția oricărui punct al dreptei este caracterizată de un număr real (coordonata punctului). În continuare, vom vedea că poziția fiecărui punct în plan poate fi caracterizată cu ajutorul unei perechi ordonate de numere reale.

De reținut

O dreaptă pe care se fixează un punct, numit origine, un sens de parcurgere și o unitate de măsură se numește *axă a numerelor*.

Un ansamblu format dintr-o pereche ordonată de axe ale numerelor, perpendiculare, cu originea comună și cu aceeași unitate de măsură, se numește *sistem de axe ortogonale* sau *reper cartezian*.

Originea comună a celor două axe (numită originea sistemului) se notează, de regulă, cu *O*.

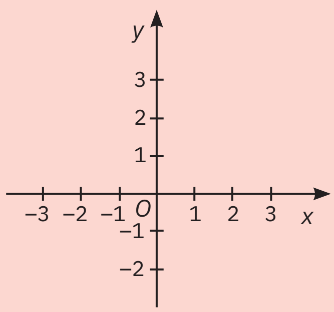


Figura 4

În mod obișnuit, un sistem de axe ortogonale se reprezintă ca în Figura 4. Săgețile indică sensul de parcurgere pe fiecare axă. De regulă, axa orizontală, numită *axa absciselor*, se notează cu *Ox*, axa verticală, numită *axa ordonatelor*, se notează cu *Oy*, iar sistemul de axe ortogonale (*Ox*, *Oy*) se notează, pe scurt, *xOy*.

Într-un sistem de axe ortogonale, axa *Ox* și orice dreaptă paralelă cu ea se numesc *drepte orizontale*, iar axa *Oy* și orice dreaptă paralelă cu ea se numesc *drepte verticale*.

Considerăm un plan înzestrat cu un sistem de axe ortogonale *xOy*. Atunci:

- Orice pereche ordonată (*a*, *b*) de numere reale se poate reprezenta în plan printr-un punct *M*, aflat la intersecția dreptei verticale care trece prin punctul de coordonată *a* de pe *Ox* cu dreapta orizontală care trece prin punctul de coordonată *b* de pe *Oy*. Punctul *M* se numește *reprezentarea geometrică* a perechii (*a*, *b*).

- Oricărui punct M din plan îi putem asocia o pereche de numere reale (a, b), unde a este coordonata proiecției punctului M pe axa Ox, iar b este coordonata proiecției punctului M pe axa Oy.
Numerele a și b se numesc *coordonatele carteziene* ale punctului M. Spunem că a este *abscisa*, iar b este *ordonata* punctului M.

În ambele situații, notăm $M(a, b)$ și citim: punctul M de coordonate a și b sau punctul M de abscisă a și ordonată b. Se mai notează și $M(x_M, y_M)$, unde $x_M = a$ și $y_M = b$.

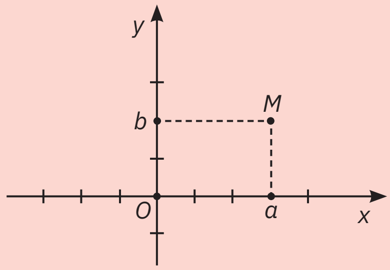


Figura 5

Exemple

Considerăm un sistem de axe ortogonale (un reper cartezian) xOy.

1. Pentru a reprezenta punctul $M(1, 2)$ în reperul xOy procedăm astfel (vezi Figura 6):
   - trasăm, punctat, dreapta paralelă cu Oy care trece prin punctul de coordonată 1 de pe axa Ox;
   - trasăm, punctat, dreapta paralelă cu Ox care trece prin punctul de coordonată 2 de pe axa Oy;
   - punctul de intersecție al celor două paralele este punctul $M(1, 2)$.

   În același fel se procedează pentru a reprezenta punctele $N(-2, 3)$, $P(-3, -1)$ sau $Q(4, -2)$ (Figura 6).
2. Fie punctele $A(-2, 0)$, $B(1, 0)$ și $C(3, 0)$. Dreapta orizontală care trece prin punctul de coordonată 0 de pe axa Oy este axa Ox, deci punctul $A(-2, 0)$ este punctul de coordonată -2 de pe axa Ox. Analog punctele $B(1, 0)$ și $C(3, 0)$ sunt punctele de coordonată 1, respectiv 3, de pe axa Ox (Figura 7).
3. Fie punctele $D(0, 3)$ și $E(0, -2)$. Deoarece dreapta verticală care trece prin punctul de coordonată 0 de pe axa Ox este axa Oy, punctul $D(0, 3)$ este punctul de coordonată 3 de pe axa Oy. Similar, punctul $E(0, -2)$ este punctul de coordonată -2 de pe axa Oy (Figura 7).

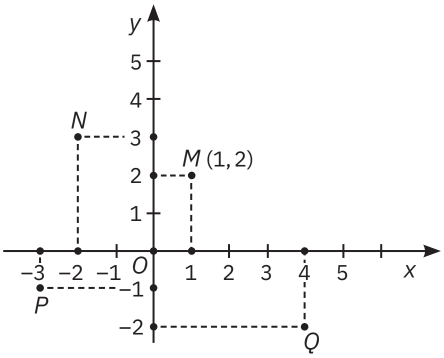


Figura 6

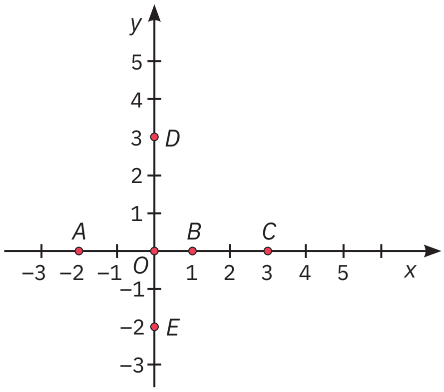


Figura 7

Observații

1. Originea O a sistemului de axe ortogonale are coordonatele egale cu 0. Scriem $O(0,0)$.
2. Punctul M aparține axei Ox dacă și numai dacă ordonata punctului M este egală cu 0. Așadar:
   a. dacă $M(x_M, y_M) \in Ox$, atunci $y_M = 0$; **b.** dacă $a \in \mathbb{R}$, punctul $M(a, 0)$ se află pe axa Ox.
3. Punctul M aparține axei Oy dacă și numai dacă abscisa punctului M este egală cu 0. Așadar:
   a. dacă $M(x_M, y_M) \in Oy$, atunci $x_M = 0$; **b.** dacă $b \in \mathbb{R}$, punctul $M(0, b)$ se află pe axa Oy.

Distanța dintre două puncte în plan

Ne reamintim că, pe axa numerelor, distanța dintre punctul A, de abscisă x_A, și punctul B, de abscisă x_B, este $AB = |x_B - x_A|$. Vom vedea, în cele ce urmează, cum se calculează distanța dintre două puncte când se cunosc coordonatele carteziene ale acestora.

Situație-problemă

Considerăm punctele $A(2, 1)$ și $B(5, 5)$. Vrem să calculăm lungimea segmentului AB (Figura 8).

Mai întâi notăm cu C intersecția dintre paralela prin A la Ox cu paralela prin B la Oy. Obținem astfel triunghiul ACB, dreptunghic în C, cu lungimile catetelor:

$$AC = x_C - x_A = 5 - 2 = 3 \text{ și } BC = y_B - y_C = 5 - 1 = 4.$$

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul ABC, obținem:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25, \text{ de unde rezultă că } AB = 5.$$

Observăm că AB se poate calcula direct, astfel:

$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

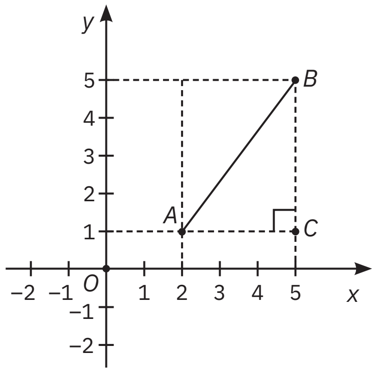


Figura 8

De reținut

Dacă $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ sunt două puncte din plan, atunci distanța dintre punctele A și B se calculează astfel: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Gândire critică

Situație-problemă

Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale xOy punctele $A(-2, 1)$ și $B(4, 3)$, apoi determinați coordonatele mijlocului segmentului AB, notat M.

Rezolvare:

Reprezentăm mai întâi punctele A și B în sistemul xOy.

Trasăm segmentul AB, fixăm punctul M, mijlocul segmentului AB.

Construim apoi paralelele prin punctele A, M, B la axa Oy și notăm intersecțiile acestora cu axa Ox cu A', M', respectiv B' (Figura 9).

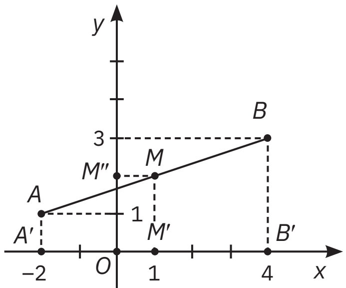


Figura 9

Cum $Oy \perp Ox$, rezultă că $AA' \perp Ox$, $MM' \perp Ox$ și $BB' \perp Ox$.

De asemenea, $AA' \parallel MM' \parallel BB'$, deci $ABB'A'$ este trapez dreptunghic.

Punctul M este mijlocul segmentului AB, rezultă că punctul M' este mijlocul segmentului $A'B'$. Atunci $A'M' = \frac{A'B'}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$, deci $OM' = 1$.

MM' este linie mijlocie în trapezul $ABB'A'$. Rezultă că $MM' = \frac{AA' + BB'}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$, de unde $OM'' = 2$.

Astfel, coordonatele punctului M sunt $(1, 2)$.

Ce observăm?

Coordonatele punctului M se pot calcula astfel: $x_M = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$, iar $y_M = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Analizând modul de rezolvare a problemei anterioare, comentați și argumentați afirmația:

Pentru oricare două puncte $A(x_1, y_1)$ și $B(x_2, y_2)$, coordonatele mijlocului M al segmentului AB sunt $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$ și $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Lucrând pe echipe, compuneți o problemă asemănătoare și prezentați colegilor rezolvarea acesteia.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Se consideră mulțimile $A = \{1, 3, 5\}$ și $B = \{-1, 0, 3\}$.

a. Determinați produsele carteziene $A \times B$, $B \times A$ și $A \times A$.

b. Determinați $\text{card}(A \times B)$, $\text{card}(B \times A)$ și $\text{card}(A \times A)$.

c. Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale xOy elementele mulțimii $A \times B$.

Rezolvare:

a. $A \times B = \{(1, -1), (1, 0), (1, 3), (3, -1), (3, 0), (3, 3), (5, -1), (5, 0), (5, 3)\}$.

$B \times A = \{(-1, 1), (-1, 3), (-1, 5), (0, 1), (0, 3), (0, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5)\}$.

$A \times A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$.

b. $\text{card}\,A = 3$, $\text{card}\,B = 3$. Rezultă $\text{card}(A \times B) = \text{card}(B \times A) = 3 \cdot 3 = 9$ și $\text{card}(A \times A) = \text{card}\,A \cdot \text{card}\,A = 9$.

c. Reprezentăm fiecare pereche de numere reale a mulțimii $A \times B$ într-un sistem xOy și obținem un grafic ca în Figura 10.

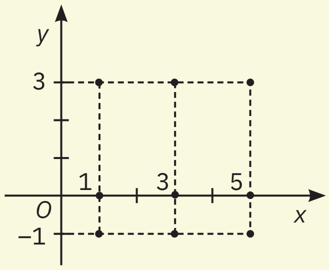


Figura 10

2. Fie punctele $A(0, 3)$, $B(-3, -1)$ și $C(3, -1)$.

a. Reprezentați punctele A, B și C într-un sistem de axe ortogonale xOy.

b. Calculați perimetrul triunghiului ABC.

c. Calculați aria triunghiului ABC.

d. Determinați coordonatele punctului M, unde M este mijlocul laturii AC.

Rezolvare:

a. Reprezentăm punctele în sistemul xOy și obținem un grafic ca în Figura 11.

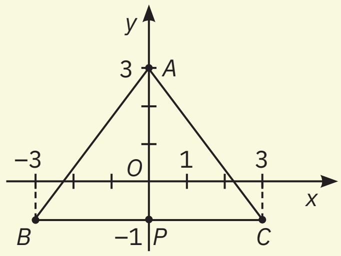


Figura 11

b. $AB = \sqrt{(-3-0)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$,

$AC = \sqrt{(3-0)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$.

BC se poate calcula folosind formula distanței dintre două puncte sau, mai rapid, observând că $BC = |x_B| + |x_C| = |-3| + |3| = 6$.

Atunci $\mathcal{P}_{ABC} = AB + AC + BC = 5 + 5 + 6 = 16$.

c. Cum $AB = AC$, rezultă că triunghiul ABC este isoscel, deci AO este înălțime, mediană etc.

Notând P punctul de intersecție dintre dreapta BC și axa Oy, obținem că AP este înălțime în triunghiul ABC și $AP = AO + OP = 3 + 1 = 4$. Avem atunci $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{BC \cdot AP}{2} = \dfrac{6 \cdot 4}{2} = 12$.

d. Dacă M este mijlocul laturii AC, atunci $x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{0+3}{2} = \dfrac{3}{2}$, iar $y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{3+(-1)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$. Deci $M\left(\dfrac{3}{2}, 1\right)$.

3. Determinați coordonatele simetricului punctului $A(-2, 4)$ față de punctul $M(1, 1)$.

Rezolvare:

Reprezentăm mai întâi cele două puncte într-un sistem de axe ortogonale xOy, ca în Figura 12.

Simetricul punctului A față de punctul M este un punct A', astfel încât M este mijlocul segmentului AA' (conform definiției simetricului unui punct față de un alt punct).

Rezultă atunci că $x_M = \dfrac{x_A + x_{A'}}{2}$, adică $1 = \dfrac{-2 + x_{A'}}{2}$, de unde $2 = -2 + x_{A'}$, deci $x_{A'} = 4$.

Procedând în același mod, $y_M = \dfrac{y_A + y_{A'}}{2}$, adică $1 = \dfrac{4 + y_{A'}}{2}$, de unde $2 = 4 + y_{A'}$, deci $y_{A'} = -2$. Astfel, obținem punctul $A'(4, -2)$.

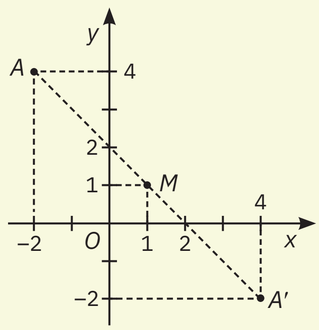


Figura 12

Probleme propuse

1. Determinați numerele reale x, y și z, știind că $(x, 2) = (3, 2)$, $(y, 4) = (-1, 4)$ și $(2, z) = (2, 1)$.

2. Se consideră mulțimile $A = \{1, 3\}$ și $B = \{0, 1\}$.

a. Determinați produsele carteziene $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$ și $B \times B$.

b. Calculați $\text{card}(A \times B)$, $\text{card}(B \times A)$, $\text{card}(A \times A)$ și $\text{card}(B \times B)$.

3. Se consideră mulțimile $A = \{-2; -1; 1; 6\}$ și $B = \{2; \sqrt{5}\}$.

a. Determinați produsele carteziene $A \times B$, $B \times A$ și $B \times B$.

b. Calculați $\text{card}(A \times B)$, $\text{card}(B \times A)$, $\text{card}(A \times A)$ și $\text{card}(B \times B)$.

4. Mulțimea A are 5 elemente, iar mulțimea B are 8 elemente. Dintre următoarele variante de răspuns, alegeți varianta corectă. Mulțimea $A \times B$ are:

A. 13 elemente; B. 5^8 elemente; C. 8^5 elemente; D. 40 de elemente.

5. Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele $A(2, 4)$, $B(-1, 3)$, $C(-3, -2)$, $D(4, -4)$, $E(3, 0)$ și $F(0, -3)$.

6. Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele $A(1{,}5; 2)$, $B(-2{,}5; -1)$, $C(2{,}3; -1{,}5)$, $D\left(-\frac{5}{2}; -2{,}3\right)$, $E(-\sqrt{2}; 0)$ și $F(0; 4{,}5)$.

7. Determinați coordonatele punctelor A, B, C, D, E și F din Figura 13.

8. Se consideră punctele $A(1, 2)$, $B(-2, 2)$, $C(4, -1)$.
   a. Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele A, B și C.
   b. Calculați distanțele AB, AC și BC.
   c. Determinați coordonatele mijloacelor segmentelor AB, AC și BC.

9. Se consideră punctele $A(0, 4)$, $B(-3, 0)$, $C(3, 0)$.
   a. Reprezentați punctele A, B și C într-un sistem de axe ortogonale xOy.
   b. Calculați perimetrul triunghiului ABC.
   c. Calculați aria triunghiului ABC.
   d. Determinați coordonatele punctelor M și N, unde M este mijlocul laturii AC, iar N este mijlocul laturii AB.

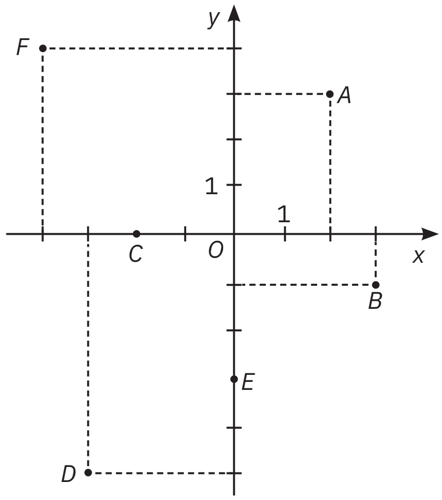


Figura 13

10. Se consideră punctele $A(-2, 0)$, $B(1, 4)$, $C(1, -4)$.
    a. Reprezentați punctele A, B și C într-un sistem de axe ortogonale xOy.
    b. Calculați perimetrul triunghiului ABC.
    c. Calculați aria triunghiului ABC.
    d. Determinați coordonatele simetricelor punctelor A și C față de punctul B.

11 Se consideră punctele $A(0, 3)$ și $B(x, 6)$.
Determinați numărul real x pentru care $AB = 5$.

12 În sistemul de axe ortogonale din Figura 14, determinați:
   a. coordonatele punctelor M, N, P;
   b. produsul cartezian $A \times B$, unde A este mulțimea formată din abscisele punctelor M, N, P, iar B este mulțimea formată din ordonatele punctelor M, N, P.

13 În Figura 15, este reprezentat produsul cartezian $A \times B$. Determinați elementele mulțimilor A și B.

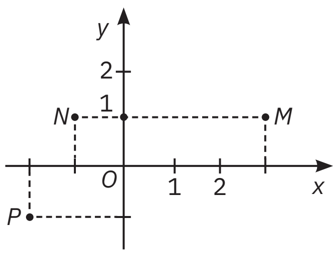


Figura 14

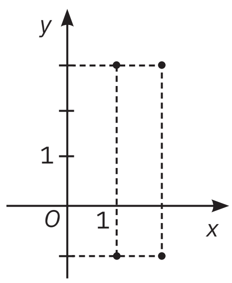


Figura 15

Minitest

1. Se consideră mulțimile $A = \{0, 2, 3\}$ și $B = \{-1, 0\}$.
Determinați produsele carteziene $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$ și $B \times B$. (3p)

2. Se consideră punctele $A(1, 3)$ și $B(-2, 1)$. Alegeți varianta corectă de răspuns.
Un singur model este corect. Simetricul punctului A față de punctul B este punctul:

A. $A'(-1, 4)$; B. $A'(5, 1)$; C. $A'(-5, -1)$; D. $A'(-5, 1)$. (3p)

3. Se consideră punctele $A(3, -3)$, $B(-3, 5)$, $C(-3, -3)$.
   a. Reprezentați punctele A, B și C într-un sistem de axe ortogonale xOy.
   b. Calculați perimetrul triunghiului ABC.
   c. Calculați aria triunghiului ABC. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

3.2

Lecția 2: Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice. Poligonul frecvențelor

Cuvinte-cheie

dependență funcțională | tabel | diagramă | frecvență | grafic | poligonul frecvențelor

Mate practică

În graficul din Figura 1 sunt reprezentați kilometrii parcurși de un sportiv pe parcursul a cinci zile.

Între numărul de kilometri parcurși într-o zi și numărul zilei respective există o relație.

Care este acea relație?

Răspuns:

În prima zi a parcurs 6 km, în ziua a doua 7 km, în ziua a treia 8 km etc.

Putem afirma că numărul de kilometri parcurși este cu 5 mai mare decât numărul zilei respective.

Ce observăm?

În exemplul anterior am pus în evidență o corespondență între elementele a două mulțimi, mulțimea zilelor și mulțimea kilometrilor parcurși.

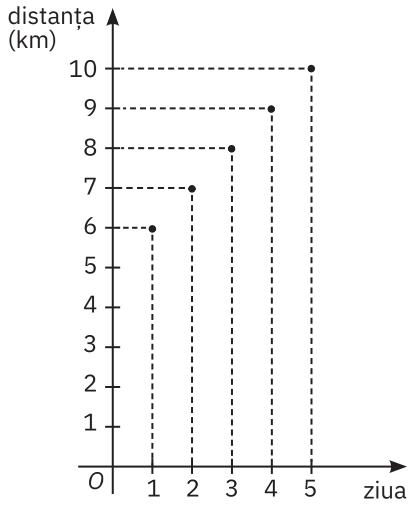


Figura 1

De reținut

Fie A și B două mulțimi nevide. Se spune că există o *dependență funcțională* de la mulțimea A la mulțimea B dacă oricărui element al mulțimii A i se asociază un unic element din mulțimea B.

În sensul de mai sus, regula prin care fiecărui element $a \in A$ i se asociază un unic element $b \in B$ se numește *lege de corespondență* sau *relație funcțională* de la mulțimea A la mulțimea B.

Se notează $a \to b$.

Observație

1. O regulă care stabilește o corespondență $a \to b$ între elementele mulțimilor A și B, unde $a \in A$ și $b \in B$, este o relație (dependență) funcțională de la A la B dacă:
   a. fiecărui element $a \in A$ i se asociază un element $b \in B$;
   b. dacă $a \to b$ și $a \to c$, atunci $b = c$. Altfel spus, elementului $a \in A$ i se asociază un unic element $b \in B$.
2. O dependență funcțională de la mulțimea A la mulțimea B se poate reprezenta printr-un tabel, printr-o diagramă sau printr-un grafic.

Exemple

1. Un kilogram de mere costă 2 lei. Atunci 2 kilograme de mere costă 4 lei, 3 kilograme de mere costă 6 lei, 5 kilograme de mere costă 10 lei. Putem scrie aceste date într-un tabel de forma:

Masa în kg	1	2	3	5
Suma plătită în lei	2	4	6	10

Notând masa cantității de mere cu x și suma plătită cu y, relația funcțională este $y = 2x$, unde $x \in \{1, 2, 3, 5\}$. Aceleași date se pot reprezenta și prin diagrame (Figura 2) sau printr-un grafic (Figura 3).

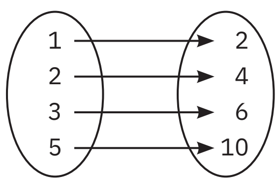


Figura 2

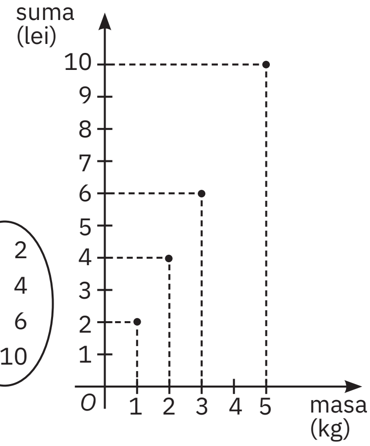


Figura 3

2. Un biciclist merge cu viteza de 10 kilometri pe oră. Va parcurge deci 15 km în 1,5 ore, 20 km în 2 ore, 30 km în 3 ore, 35 km în 3,5 ore, 60 km în 6 ore. Aceste date se pot scrie într-un tabel astfel:

Timpul (ore)	1	1,5	2	3	3,5	6
Distanța (km)	10	15	20	30	35	60

Notând timpul (în ore) cu x și distanța parcursă de biciclist (în kilometri) cu y, obținem relația funcțională $y = 10x$. Putem reprezenta datele din tabel prin diagrame (Figura 4) sau printr-un grafic (Figura 5).

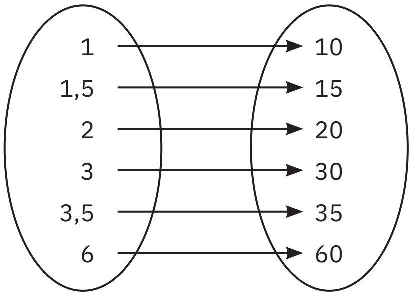


Figura 4

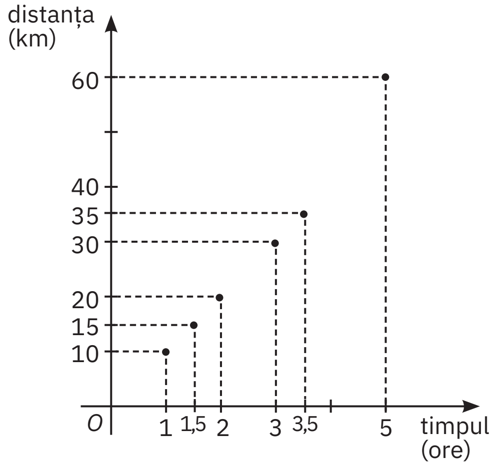


Figura 5

Mate practică

Elevii clasei a VII-a A obțin următoarele rezultate la un test la matematică:

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	1	2	4	5	7	4	2

Aceste rezultate pot fi reprezentate printr-o diagramă circulară (Figura 6) sau printr-o diagramă cu bare (Figura 7).

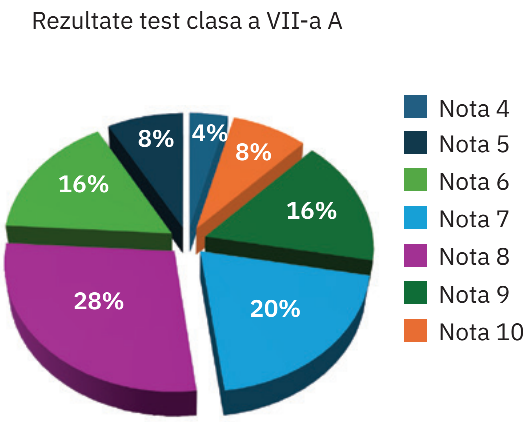


Figura 6

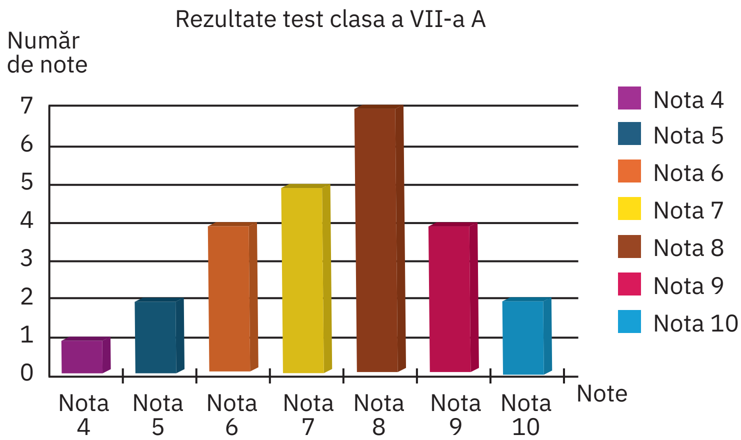


Figura 7

Ce observăm?

Analizând rezultatele obținute de elevi, observăm că nota 4 apare o singură dată, notele 5 și 10 apar fiecare de câte două ori, notele 6 și 9 de câte patru ori ș.a.m.d. Numărul care arată de câte ori apare o notă în rezultatele clasei se numește frecvență.

Reprezentăm din nou rezultatele sub forma unui grafic, ca în Figura 8.

Unind prin segmente rezultatele, se obține un poligon, numit poligonul frecvențelor.

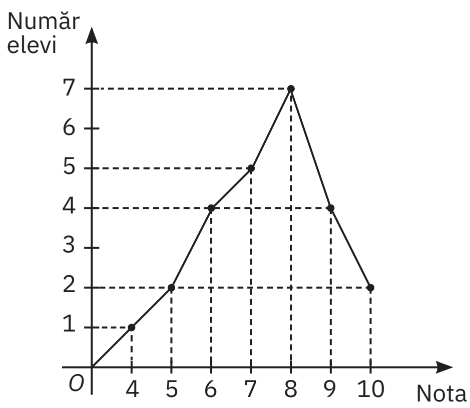


Figura 8

3.2

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. În diagrama din Figura 9 sunt reprezentate distanțele parcurse de șase alergători, în timpul unui antrenament de o oră.

a. Câți kilometri a parcurs Rareș? Dar Vlad?

b. Care alergător a parcurs cei mai mulți kilometri?

c. Cu câți kilometri a parcurs mai mult Tudor decât Andrei?

Rezolvare:

a. Conform diagramei, Rareș a parcurs 10 kilometri, iar Vlad 15 kilometri.

b. Se observă că Tudor a parcurs cei mai mulți kilometri, 16.

c. Andrei a parcurs 9 kilometri, Tudor a parcurs 16 kilometri.
$16 - 9 = 7$. Deci Tudor a parcurs cu 7 kilometri mai mult decât Andrei.

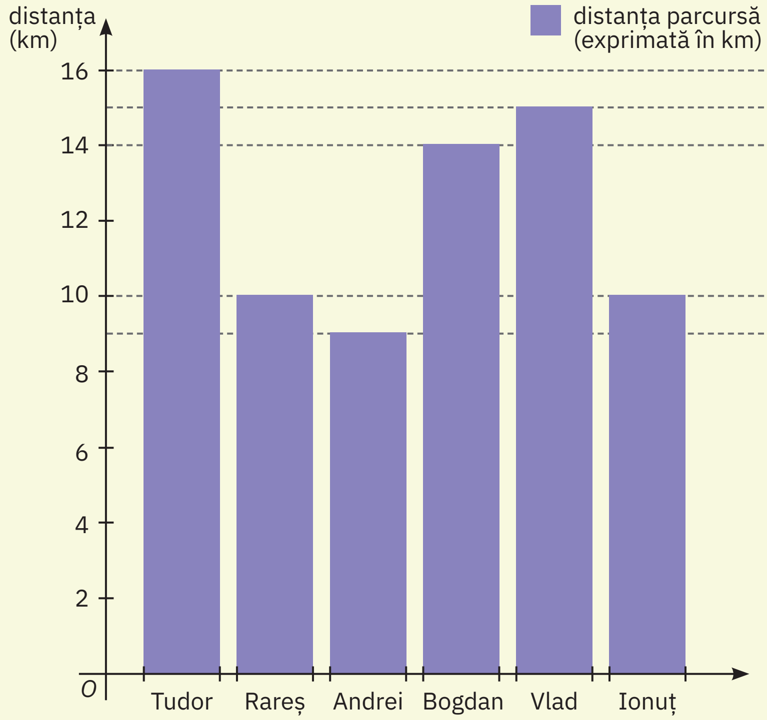


Figura 9

2. În diagrama din Figura 10 este prezentată repartiția celor 800 de elevi ai unei școli în funcție de modul lor de deplasare spre școală.

a. Care este procentul elevilor care se deplasează spre școală cu autobuzul?

b. Care este numărul elevilor care se deplasează spre școală pe jos?

Rezolvare:

a. Numărul total al elevilor reprezintă 100%.
Atunci, procentul celor care se deplasează spre școală cu autobuzul este $100\% - (30\% + 20\% + 15\%) = 100\% - 65\% = 35\%$.

b. Numărul elevilor care se deplasează spre școală pe jos se calculează astfel:
15% din $800 = \dfrac{15}{100} \cdot 800 = 120$.

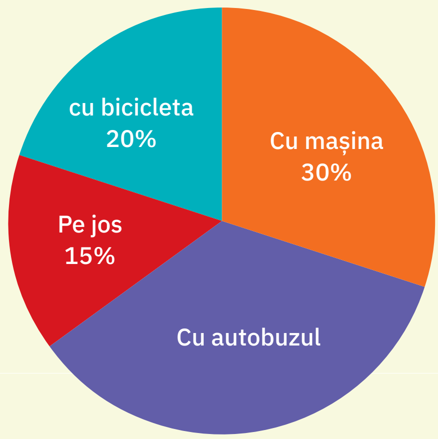


Figura 10

3. La un post de radio se realizează un sondaj cu întrebarea:
Dintre următoarele genuri de muzică, pe care preferați să îl ascultați: 1. Muzică pop; 2. Rock; 3. Muzică clasică; 4. Hip-hop; 5. House; 6. Jazz; 7. Muzică populară; 8. Altul decât cele menționate?

La sondaj au participat 200 de persoane, care au oferit următoarele răspunsuri:

Muzică pop: 50 de persoane; 2. Rock: 30 de persoane; 3. Muzică clasică: 10 persoane; 4. Hip-hop: 36 de persoane; 5. House: 24 de persoane; 6. Jazz: 10 persoane; 7. Muzică populară: 20 de persoane; 8. Altul decât cele menționate: 20 de persoane.

a. Alegeți forma convenabilă (diagramă sau grafic) de reprezentare a răspunsurilor obținute, astfel încât să se evidențieze genul de muzică preferat de cei mai mulți ascultători.

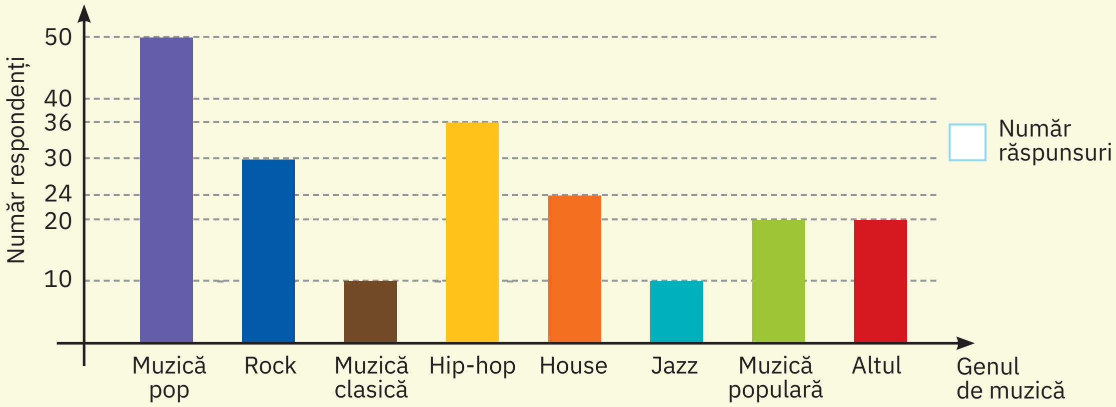
b. Alegeți forma convenabilă (diagramă sau grafic) de reprezentare a răspunsurilor obținute, astfel încât să se evidențieze procentul genului de muzică preferat de cei mai mulți ascultători.

c. Alegeți forma convenabilă (diagramă sau grafic) de reprezentare a răspunsurilor obținute, astfel încât să se evidențieze frecvența răspunsurilor pentru fiecare gen de muzică.

Rezolvare:

a. Cea mai convenabilă formă de reprezentare este în acest caz diagrama cu bare (ca în Figura 11), deoarece genul de muzică preferat, muzica pop în acest caz, se evidențiază imediat:

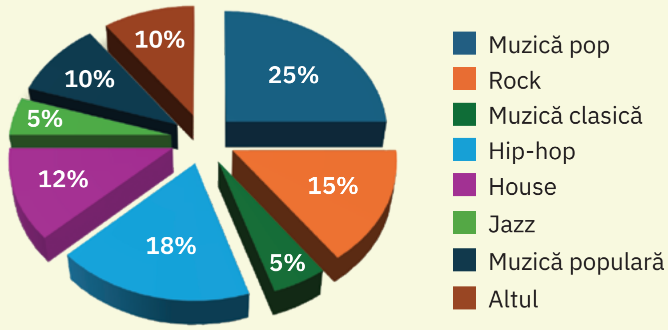
Figura 11



b. Pentru a scoate în evidență procentele, este utilă o diagramă circulară, ca în Figura 12.

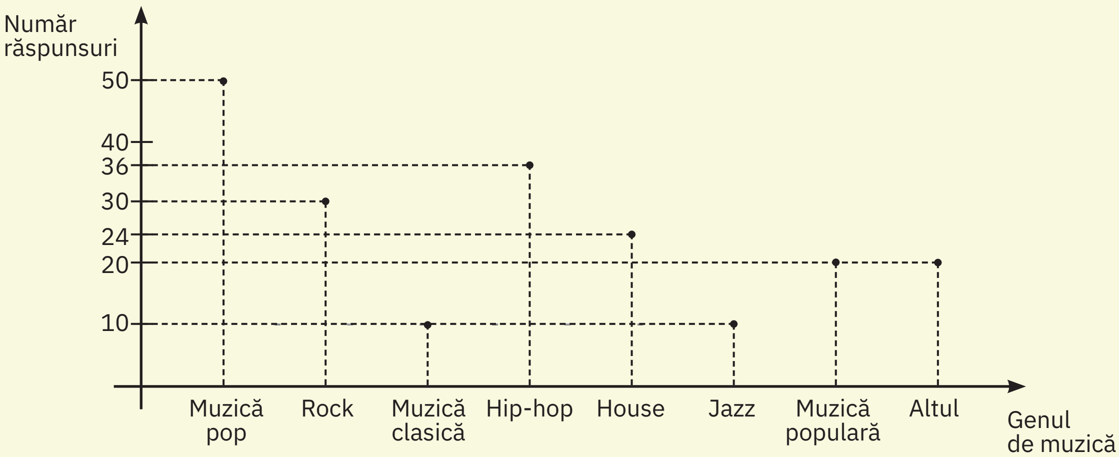
Figura 12

Rezultate test clasa a VII-a A



c. Frecvența răspunsurilor se evidențiază mai bine printr-un grafic, ca în Figura 13.

Figura 13



Proiect „Topografi în școală”

Clasa este împărțită în grupe de 3-4 elevi.

Fiecare grupă va face măsurători pentru patru încăperi din școală. Acestea pot fi alese dintre: săli de clasă, bibliotecă, laboratoare, sala de sport etc. Grupele stabilesc la început, de comun acord, care sunt cele patru încăperi alese.

După alegerea încăperilor, fiecare grupă își stabilește necesarul de materiale; se împart sarcinile pentru fiecare membru, apoi se fac măsurătorile.

Fiecare grupă are de completat tabelul alăturat.

Sala	1	2	3	4
Lungimea (m)				
Lățimea (m)				
Perimetrul (m)				
Aria (m^2)				

Evaluarea proiectului

După terminarea măsurătorilor, grupele expun rezultatele obținute. Se compară rezultatele, se analizează eventualele diferențe, au loc discuții referitoare la rezultatele obținute.

Câștigă grupa care are cele mai multe dimensiuni conforme cu dimensiunile reale ale sălilor.

Pornind de la actualele rezultate, se pot face estimări privind perimetrele și ariile altor încăperi din școală.

Probleme propuse

1. În tabelul următor este prezentată repartiția elevilor unei clase în funcție de mediile obținute la matematică în anul școlar precedent.

Media	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	1	4	4	5	5	4	3

Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.

a. Numărul elevilor din această clasă care au obținut media 8 este egal cu ... .

b. Numărul elevilor din această clasă care au obținut media mai mare decât 8 este egal cu ... .

c. Numărul elevilor din această clasă care au obținut cel puțin media 6 și cel mult media 8 este egal cu ... .

2. În tabelul următor sunt prezentate măsurătorile efectuate la o stație meteorologică, la aceeași oră, în fiecare zi a unei săptămâni din luna martie:

Ziua	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Temperatura (°C)	13	11	9	10	13	16	12

Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.

a. Cea mai mică temperatură măsurată în acea săptămână a fost de ... °C.

b. Diferența dintre cea mai mare și cea mai mică temperatură a fost de ... °C.

c. Temperatura medie înregistrată în acea săptămână a fost de ... °C.

3. În graficul din Figura 14 este reprezentată dependența dintre distanța parcursă de un autocar și timpul în care a fost parcursă această distanță. Completați spațiul liber pentru a obține o propoziție adevărată.
Distanța parcursă de autocar în 90 de minute este de ... kilometri.

4. În diagrama din Figura 15 este reprezentată repartiția celor 400 de elevi ai unui club sportiv în funcție de sportul la care sunt înscriși.
Completațíi spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.

a. Procentul elevilor care sunt înscriși la handbal este ...%.

b. Numărul elevilor înscriși la baschet este ... .

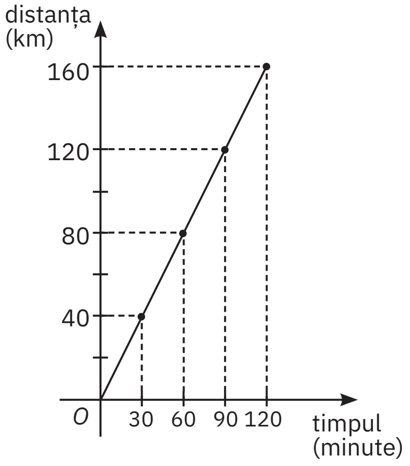


Figura 14

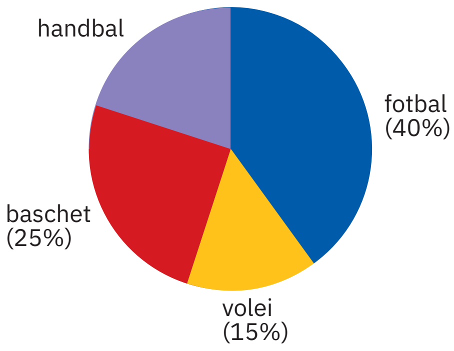


Figura 15

5. Un kilogram de portocale costă 4 lei. Știind acest lucru, determinați ce sumă de bani ar trebui să plătească Dina, dacă vrea să cumpere 2 kg, 4 kg, 5 kg, 9 kg, respectiv 15 kg de mere. Completați rezultatele în tabelul următor:

Masa (în kg)	1	2	4	5	9	15
Prețul (lei)	4					

6. Un autoturism merge cu viteza medie de 90 de kilometri pe oră. Completați tabelul următor, conform modelului:

Timpul (ore)	1	2	4		8		12	
Distanța (km)	90			450		900		1 350

7. Completați tabelul următor:

Lungimea laturii triunghiului echilateral (cm)	3		5		9		18	
Perimetrul triunghiului echilateral (cm)		12		21		42		72

8. În graficul din Figura 16 sunt reprezentate veniturile obținute de un magazin pe parcursul a două semestre.
   a. Conform graficului, câte milioane de lei a încasat magazinul în semestrul I prin vânzarea de produse electronice?
   b. Conform graficului, în ce semestru a vândut magazinul mai multe produse alimentare?
   c. În care semestru veniturile obținute sunt mai mari și cu cât?

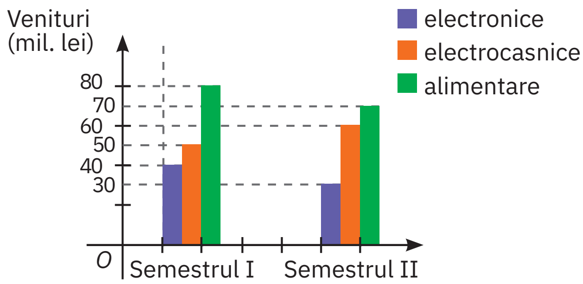


Figura 16

9. În graficul din Figura 17 este prezentată evoluția prețului unui apartament pe parcursul unui an.
   a. Care este prețul apartamentului la finalul anului?
   b. Care sunt lunile în care prețul apartamentului a scăzut?
   c. Care este luna cu cea mai mare scădere de preț?
   d. Care sunt lunile în care prețul a stagnat?

10. În Figura 18 sunt reprezentate profiturile și pierderile lunare ale unei firme în primul semestru al unui an.
   a. Câte luni a înregistrat pierderi firma?
   b. Care este profitul pe primele două luni?
   c. Care este profitul final după cele șase luni?

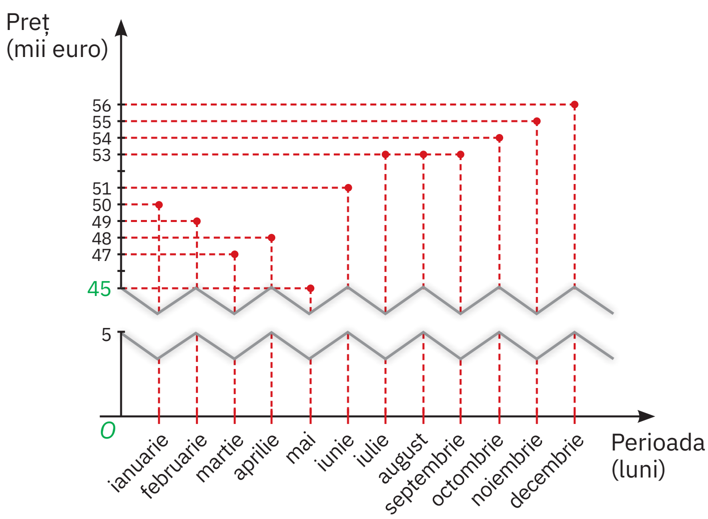


Figura 17

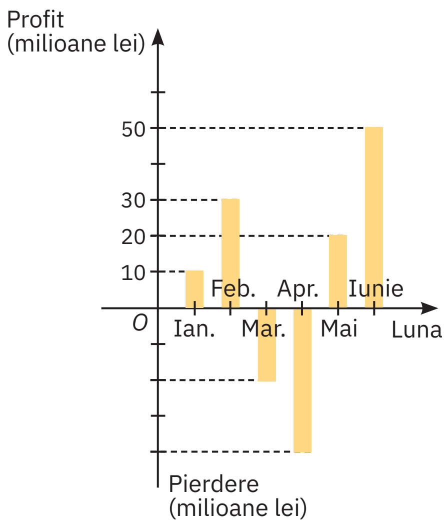


Figura 18

11. În vederea stabilirii echipelor sportive la o școală, elevii răspund unor chestionare referitor la sporturile preferate. Una dintre întrebările primite este:
Care este sportul preferat, dintre următoarele: 1. Fotbal; 2. Baschet; 3. Handbal; 4. Alt sport?
Cei 30 de elevi ai clasei a VII-a A au dat următoarele răspunsuri:
1. Fotbal – 12 răspunsuri; 2. Baschet – 9 răspunsuri; 3. Handbal – 3 răspunsuri; 4. Alt sport – 6 răspunsuri.

a. Alegeți forma convenabilă (diagramă sau grafic) de reprezentare a răspunsurilor obținute, astfel încât să se evidențieze sportul preferat de cei mai mulți elevi ai clasei a VII-a A.

b. Alegeți forma convenabilă (diagramă sau grafic) de reprezentare a răspunsurilor obținute, astfel încât să se evidențieze procentul sportului preferat de cei mai mulți elevi ai clasei a VII-a A.

c. Alegeți forma convenabilă (diagramă sau grafic) de reprezentare a răspunsurilor obținute, astfel încât să se evidențieze frecvența răspunsurilor pentru fiecare sport.

12. Stabiliți o dependență funcțională între mulțimile $A = \{\text{Spania, Cehia, Mexic, China, Australia, Brazilia}\}$ și $B = \{\text{Europa, Asia, Australia, America de Nord, America de Sud}\}$. Reprezentați apoi dependența printr-o diagramă.

13. Se consideră dependența funcțională $x \to y$, de la mulțimea $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ la mulțimea $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, dată prin regula $y = x + 1$. Reprezentați dependența dată printr-un tabel, printr-o diagramă și printr-un grafic.

14 Stabiliți o dependență funcțională între mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{3, 6, 9\}$. Reprezentați apoi dependența printr-o diagramă.

Autoevaluare

1. În tabelul următor sunt prezentate rezultatele obținute de elevii unei clase la un test:

Nota	3	4	5	6	7	8	9	10
Număr de elevi	2	3	3	4	4	5	3	1

a. Conform tabelului, câți elevi au obținut nota 7?

b. Conform tabelului, câți elevi au obținut cel puțin nota 8?

c. Care este media clasei la acest test? **(3p)**

2. În diagrama din Figura 19 este prezentată repartiția celor 30 de elevi ai unei clase a VIII-a în funcție de opțiunile lor referitoare la continuarea studiilor.

a. Care este procentul elevilor care au optat pentru filiera vocațională?

b. Care este procentul elevilor care au optat pentru filiera tehnologică?

c. Câți elevi au optat pentru filiera teoretică?

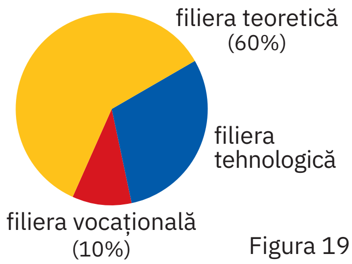


Figura 19 **(3p)**

3. Stabiliți o dependență funcțională între mulțimile $A = \{0, 1, 3\}$ și $B = \{2, 3, 5\}$. Reprezentați apoi dependența printr-o diagramă. **(3p)**

Notă. Se alocă 1 punct pentru fiecare subpunct rezolvat corect. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Recapitulare și evaluare

Produsul cartezian a două mulțimi nevide • Sistem de axe ortogonale • Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale • Distanța dintre două puncte în plan • Reprezentarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice

Pentru exercițiile 1-2, notați în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect. Pentru exercițiile 3-11, scrieți rezolvările complete.

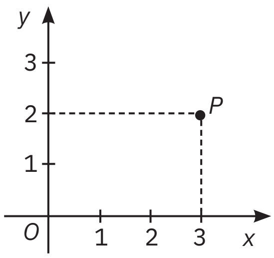
1. Dacă $(x, 3) = (4, 3)$, atunci x este egal cu:

a. 1; **b.** 2; **c.** 3; **d.** 4.

2. Dacă card $A = 4$, card $B = 6$, atunci card$(A \times B)$ este egal cu:

a. 10; **b.** 2; **c.** 24; **d.** −2.

3. Coordonatele punctului P din figura următoare sunt:



a. $P(2; 3)$;

b. $P(3; 3)$;

c. $P(3; 2)$;

d. $P(2; 2)$.

4. Se consideră tabelul:

Cantitate (kg)	2	3	4
Preț (lei)	5	7,5	y

Completați spațiul liber pentru a obține o propoziție adevărată.

Valoarea lui y este ... .

5. În tabelul următor este prezentată repartiția elevilor unei clase, după sportul la care sunt înscriși în cadrul unui club sportiv:

Sportul	Baschet	Fotbal	Handbal	Volei
Număr elevi	9	11	4	4

Știind că fiecare elev face un singur sport și că în clasă sunt doi elevi care nu fac niciun sport, să se determine numărul elevilor din acea clasă.

6. Se consideră diagrama din Figura 20.

Completați spațiul liber pentru a obține o propoziție adevărată.

Porțiunea mai deschisă la culoare reprezintă ...% din suprafața discului.

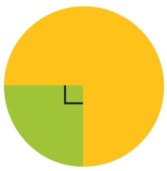


Figura 20

7. În diagrama din Figura 21 sunt prezentate opțiunile celor 100 de elevi din clasele a VI-a ale unei școli referitoare la studiul limbilor moderne:

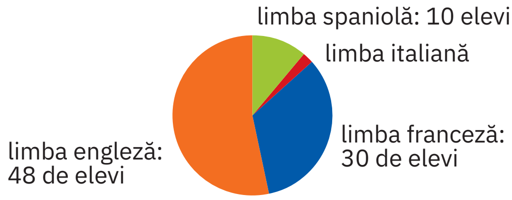
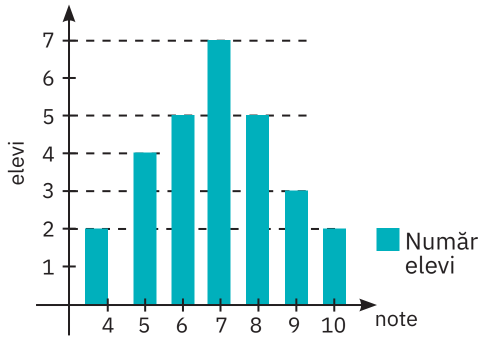


Figura 21

Completați spațiul liber pentru a obține o propoziție adevărată.

Numărul elevilor de clasa a VI-a care optează pentru studiul limbii italiene este egal cu ... .

8. În graficul următor este prezentată repartiția notelor obținute de elevii unei clase la un test:



Precizați care dintre enunțurile următoare este adevărat și care este fals:

a. 5 elevi au luat nota 8.	**b.** 6 elevi au luat nota 5.	**c.** Testul a fost susținut de 28 de elevi.

9. Se consideră mulțimile $A = \{1, 2\}$ și $B = \{-1, 3\}$. Calculați $A \times B$ și $B \times A$.

10. Se consideră punctele $A(0, 2)$, $B(-2, 0)$, $C(2, 0)$.

a. Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele A, B și C.

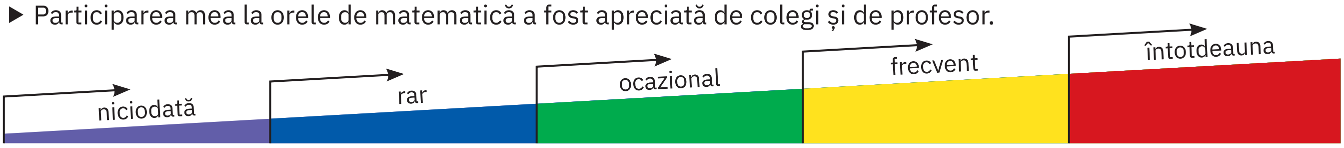
b. Calculați distanțele AB, AC și BC.

11. Se consideră punctele $A(x, 1)$ și $B(0, 4)$. Determinați numărul real x pentru care $AB = 5$.

Fișa de observare sistematică

▶ Am fost preocupat să aflu lucruri noi despre metodele de rezolvare a problemelor.

▶ Participarea mea la orele de matematică a fost apreciată de colegi și de profesor.



U4 Patrulaterul

Patrulaterele sunt utilizate în arta grafică, sculptură, pentru a crea logo-uri, dar și ambalaje, în programarea pe computer și în web design. Aceste figuri geometrice sunt cele mai des întâlnite forme în arhitectură. Întâlnim patrulatere în aproape toate revistele și ziarele, în forma camerelor de locuit și a zidurilor caselor.

4.1

Lecția 1: Patrulaterul convex. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex

Cuvinte-cheie

patrulater convex concav perimetru diagonală vârf

Patrulaterul convex

Situație-problemă

În figurile geometrice 1-2 sunt marcate punctele distincte *A*, *B*, *C* și *D*, respectiv *E*, *F*, *G* și *H*, considerate în ordinea scrisă. Observăm că în fiecare figură oricare trei puncte din cele patru menționate sunt necoliniare.

Mai mult, segmentele *AB* și *CD* sau *BC* și *DA*, respectiv *EF* și *GH* sau *FG* și *HE* nu au niciun punct comun.

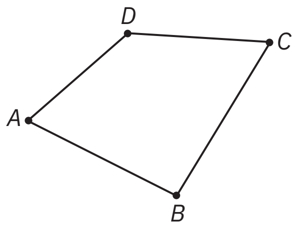


Figura 1

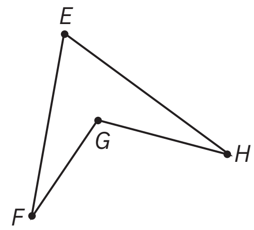


Figura 2

De reținut

Figurile geometrice de mai sus, formate din reuniunea segmentelor *AB*, *BC*, *CD* și *DA*, respectiv *EF*, *FG*, *GH* și *HE* se numesc patrulatere și se notează *ABCD*, respectiv *EFGH*.

Situație-problemă

Studiați figurile geometrice 3-5 și stabiliți dacă *ABCD* este patrulater:

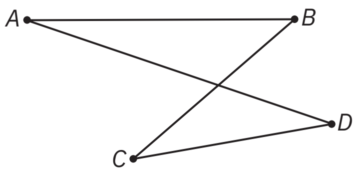


Figura 3

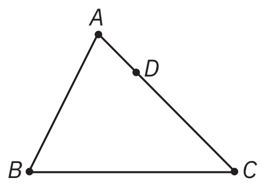


Figura 4

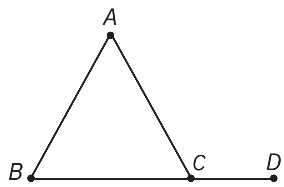


Figura 5

Justificare și răspuns

În figura 3, segmentele *BC* și *AD* se intersectează într-un punct interior; în figura 4, punctele *A*, *D* și *C* sunt coliniare, iar în figura 5, punctele *B*, *C*, *D* sunt coliniare.

Așadar niciuna dintre aceste figuri geometrice nu reprezintă patrulaterul *ABCD*.

Observăm că, utilizând punctele din figura 3, se poate obține patrulaterul *ABDC* (Figura 6).

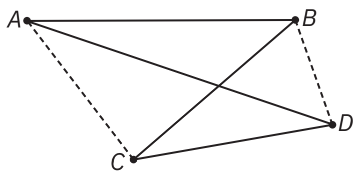


Figura 6

De reținut

- Punctele *A*, *B*, *C* și *D* se numesc *vârfurile* patrulaterului *ABCD* (Figura 7).
  Vârfurile *A* și *B* se numesc *vârfuri alăturate* sau *vârfuri consecutive*. La fel, vârfurile *B* și *C*, *C* și *D*, respectiv *A* și *D*.
  Vârfurile *A* și *C*, respectiv *B* și *D* se numesc *vârfuri opuse*.
- Un patrulater se notează scriind una după alta, în ordine circulară, literele care denumesc cele patru vârfuri. Astfel, patrulaterul *ABCD* poate fi notat (citit) și *BCDA*, *CDAB*, *DABC*, respectiv *ADCB*, *DCBA*, *CBAD* sau *BADC*.

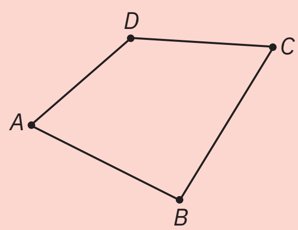


Figura 7

Definiție. Patrulaterul în care dreapta determinată de oricare două vârfuri alăturate nu separă celelalte două vârfuri se numește *patrulater convex*.

De exemplu, în patrulaterul convex *ABCD*, dreapta *AB* nu separă vârfurile *C* și *D*: cele două vârfuri, *C* și *D*, se află în același semiplan determinat de dreapta *AB*. La fel, dreapta *BC* nu separă punctele *A* și *D*, dreapta *CD* nu separă punctele *A* și *B* și nici dreapta *AD* nu separă punctele *B* și *C*.

- Un patrulater care nu este patrulater convex se numește *patrulater concav*.
  De exemplu, în patrulaterul concav *EFGH* din Figura 8, dreapta *FG* separă vârfurile *E* și *H*. Cele două vârfuri, *E* și *H*, se află în semiplane opuse determinate de dreapta *FG*.

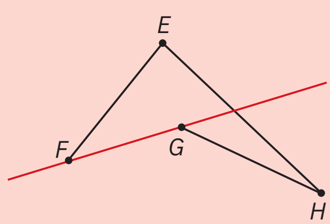


Figura 8

De reținut

Într-un patrulater convex *ABCD*:

- Segmentul cu extremitățile în două vârfuri consecutive ale patrulaterului se numește *latură*. Laturile patrulaterului *ABCD* sunt *AB*, *BC*, *CD* și *AD*.
- Două laturi care au o extremitate în comun se numesc *laturi consecutive*. Distingem patru perechi de laturi consecutive: *AB* și *BC*, *BC* și *CD*, *CD* și *AD*, respectiv *AD* și *AB*.
- Două laturi care nu au nicio extremitate în comun se numesc *laturi opuse*. Distingem două perechi de laturi opuse: *AB* și *CD*, respectiv *AD* și *BC*.
- Unghiurile *BAD*, *ABC*, *BCD* și *ADC* se numesc *unghiurile patrulaterului*. Vârfurile acestor unghiuri coincid cu vârfurile patrulaterului. Când nu există pericol de confuzie, putem nota aceste unghiuri și $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$, respectiv $\sphericalangle D$.
- Două unghiuri care au în comun o latură a patrulaterului se numesc *unghiuri consecutive* sau *alăturate*. Sunt patru perechi de unghiuri consecutive: $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$, $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$, $\sphericalangle C$ și $\sphericalangle D$, respectiv $\sphericalangle D$ și $\sphericalangle A$.
- Două unghiuri care nu au în comun nicio latură a patrulaterului se numesc *unghiuri opuse*. Există două perechi de unghiuri opuse: $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle C$, respectiv $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle D$.
- Segmentul cu extremitățile în două vârfuri opuse ale patrulaterului se numește *diagonală*. Diagonale sunt segmentele *AC* și *BD*.

Exemple

În Figura 9, *MPST* este un patrulater convex.

Verificați-vă cunoștințele studiind tabelul de mai jos:

Vârfuri alăturate	Vârfuri opuse	Laturi consecutive	Laturi opuse	Unghiuri opuse	Unghiuri consecutive	Diagonale
M cu *P* și *T*	*M* și *S*	*MP* și *PS*	*MP* și *ST*	$\sphericalangle M$ și $\sphericalangle S$	$\sphericalangle M$ cu $\sphericalangle P$ și $\sphericalangle T$	*MS*
P cu *M* și *S*	*P* și *T*	*PS* și *ST*	*PS* și *MT*	$\sphericalangle P$ și $\sphericalangle T$	$\sphericalangle P$ cu $\sphericalangle M$ și $\sphericalangle S$	*TP*
S cu *P* și *T*		*ST* și *TM*			$\sphericalangle S$ cu $\sphericalangle P$ și $\sphericalangle T$	
T cu *S* și *M*		*TM* și *MP*			$\sphericalangle T$ cu $\sphericalangle M$ și $\sphericalangle S$	

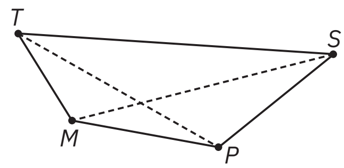


Figura 9

Observații

Fie *ABCD* un patrulater.

Mulțimea punctelor din plan delimitată de segmentele *AB*, *BC*, *CD* și *DA* se numește *interiorul patrulaterului ABCD* și se notează Int(*ABCD*).

Mulțimea punctelor din plan care nu aparțin patrulaterului și nici interiorului patrulaterului *ABCD* se numește *exteriorul patrulaterului ABCD* și se notează Ext(*ABCD*).

Exemplu

În Figura 10, punctele:

- *A*, *B*, *C*, *D*, *K*, *L*, *M* aparțin patrulaterului *ABCD*;
- *E*, *F*, *G* aparțin interiorului patrulaterului *ABCD*;
- *H*, *I*, *J* aparțin exteriorului patrulaterului *ABCD*.

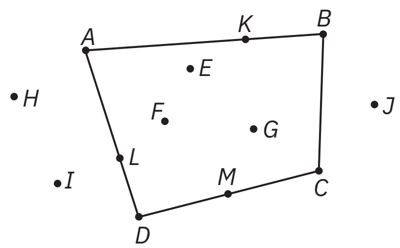


Figura 10

Observații

- Într-un patrulater convex *ABCD*, oricare ar fi două puncte distincte *E* și *F* din interiorul acestuia, segmentul *EF* este inclus în interiorul patrulaterului (Figura 11).
- Într-un patrulater concav *HGJI*, există cel puțin două puncte distincte *K* și *L* din interiorul acestuia, astfel încât segmentul *KL* nu este inclus în interiorul patrulaterului (Figura 12).

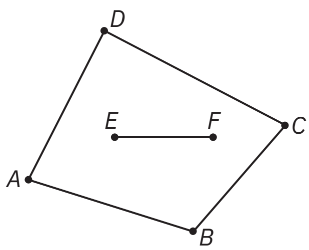


Figura 11

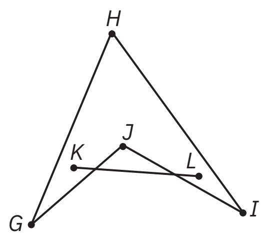


Figura 12

4.1

Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex

Mate practică

Decupați unghiurile patrulaterului convex din Figura 13 și așezați-le ca în Figura 14. Ce observați?

Răspuns:

Dacă ați procedat corect, veți constata că cele patru unghiuri ale patrulaterului convex din Figura 13 devin unghiuri în jurul unui punct în Figura 14.

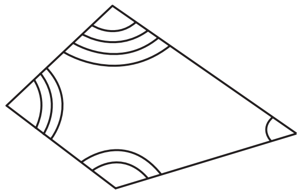


Figura 13

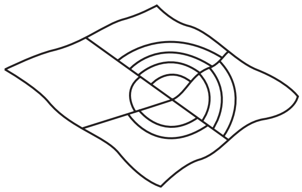


Figura 14

De reținut

Teoremă. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu 360°.

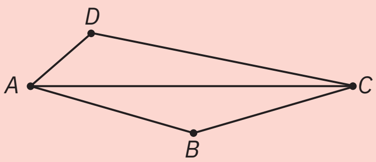


Figura 15

Ipoteză: *ABCD* este patrulater convex.

Concluzie: $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360°$.

Demonstrație:

Construim diagonala *AC* a patrulaterului convex *ABCD* (Figura 15). Se formează astfel două triunghiuri, *ABC* și *ADC*. Suma măsurilor unghiurilor triunghiurilor *ABC* și *ADC* este, fiecare, egală cu 180°, deci au loc relațiile $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB = 180°$ (1), respectiv $\sphericalangle DAC + \sphericalangle ADC + \sphericalangle ACD = 180°$ (2).

Adunând egalitățile (1) și (2) membru cu membru și folosind proprietățile adunării, obținem:

$(\sphericalangle BAC + \sphericalangle DAC) + \sphericalangle ABC + (\sphericalangle ACB + \sphericalangle ACD) + \sphericalangle ADC = 360°$, adică $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360°$.

Istoria matematicii

Cuvântul *patrulater* este compus din două cuvinte provenite din limba latină: „quattuor" = patru și „latus -eris" = latură.

Cuvântul *diagonală* este compus din două cuvinte provenite din limba greacă: „dia" = prin și „gonia" = unghi.

Cuvântul *convex* vine din limba latină, unde „convexus" înseamnă *bombat*; *concav* vine de asemenea din limba latină, unde „concavus" înseamnă *scobit*.

Construcția unui patrulater convex în anumite condiții date

Desenați un patrulater convex *ABCD* astfel încât $\sphericalangle A = 40°$, $\sphericalangle B = 80°$, $\sphericalangle C = 130°$ și determinați măsura unghiului *D*.

Rezolvare:

Construim un segment *AB*. Pe latura *AB* construim, ca în Figura 16, unghiul cu vârful în *A* cu măsura de 40° și unghiul cu vârful în *B* cu măsura de 80°. Celelalte două laturi ale unghiurilor se intersectează în punctul *P*. Alegem un punct *C* în interiorul segmentului *PB* și construim unghiul *BCD* cu măsura de 130°. Am obținut astfel patrulaterul convex *ABCD*. Măsura unghiului *D* este egală cu $360° - 40° - 80° - 130° = 110°$.

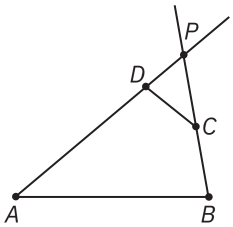


Figura 16

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Determinați măsurile unghiurilor *A*, *B*, *C* și *D* ale unui patrulater convex, știind că acestea sunt direct proporționale cu numerele 3, 5, 4 și respectiv 6 (Figura 17).

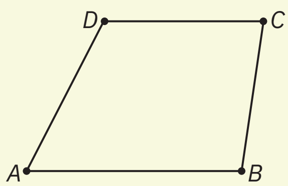


Figura 17

Rezolvare:

Măsurile unghiurilor *A*, *B*, *C* și *D* sunt direct proporționale cu numerele 3, 5, 4, respectiv 6. Atunci $\frac{\sphericalangle A}{3} = \frac{\sphericalangle B}{5} = \frac{\sphericalangle C}{4} = \frac{\sphericalangle D}{6} = \frac{\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D}{3+5+4+6} = \frac{360°}{18} = 20°$.

Obținem următoarele măsuri: $\sphericalangle A = 3 \cdot 20° = 60°$, $\sphericalangle B = 5 \cdot 20° = 100°$, $\sphericalangle C = 4 \cdot 20° = 80°$ și $\sphericalangle D = 6 \cdot 20° = 120°$.

2. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $AB \equiv BC$, $AC \cap BD = \{O\}$, $BD \perp AC$, $AO = 4$ cm și $BO = 3$ cm, iar triunghiul ACD este echilateral. Determinați perimetrul patrulaterului $ABCD$ (Figura 18).

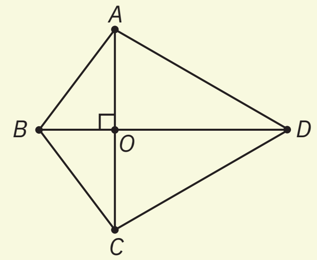


Figura 18

Rezolvare:
Cum $AB \equiv BC$ și $BD \perp AC$, rezultă că BO este înălțimea corespunzătoare bazei în triunghiul isoscel BAC. Așadar, BO este mediană în ΔBAC, deci O este mijlocul laturii AC. Rezultă că $AC = 2 \cdot AO = 8$ cm, deci $AD = CD = AC = 8$ cm (întrucât triunghiul ACD este echilateral).
Folosind teorema lui Pitagora în triunghiul OAB, dreptunghic în O, rezultă că $AB^2 = AO^2 + BO^2 = (4 \text{ cm})^2 + (3 \text{ cm})^2 = 25 \text{ cm}^2$, deci $AB = 5$ cm $= BC$.
În concluzie: $\mathcal{P}_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 5 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 8 \text{ cm} + 8 \text{ cm} = 26$ cm.

3. Fie $ABCD$ un patrulater convex, cu $AB = BC$ și $CD = AD$. Arătați că diagonalele patrulaterului sunt perpendiculare (Figura 19).

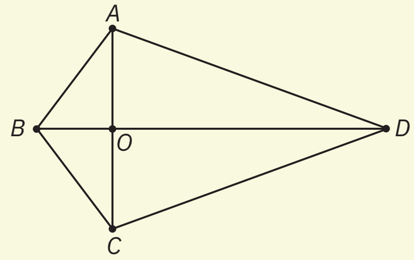


Figura 19

Demonstrație:
$AB = BC \Rightarrow d(B, A) = d(B, C)$ (1) și $CD = AD \Rightarrow d(D, C) = d(D, A)$ (2).
Din relațiile (1) și (2) $\Rightarrow BD$ este mediatoarea diagonalei $AC \Rightarrow BD \perp AC$.

Probleme propuse

1. În patrulaterul convex $ABCD$, $\sphericalangle A = 70°$ și $\sphericalangle C = 120°$. Determinați suma măsurilor unghiurilor B și D.
2. Desenați un patrulater convex $ABCD$ astfel încât $\sphericalangle A = 50°$, $\sphericalangle B = 90°$, $\sphericalangle C = 120°$. Determinați măsura unghiului D.
3. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex știind că sunt direct proporționale cu 3, 4, 5 și 6.
4. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex știind că sunt invers proporționale cu numerele 0,(3), 0,25, 0,5 și 0,1(6).
5. În patrulaterul convex $ABCD$ avem $\sphericalangle A = 2 \cdot \sphericalangle B = 3 \cdot \sphericalangle C = 4 \cdot \sphericalangle D$. Determinați măsurile unghiurilor patrulaterului $ABCD$.
6. Un patrulater convex are un unghi cu măsura de 60°. Determinați măsurile celorlalte trei unghiuri ale patrulaterului, știind că sunt exprimate prin numere naturale consecutive.
7. Patrulaterul convex $ABCD$ are $AB + BC + CD + DA = 50$ cm. Triunghiul ABC are perimetrul de 38 cm. Știind că $AC = 15$ cm, determinați perimetrul triunghiului ADC.
8. În patrulaterul convex $ABCD$, unghiurile A și C sunt congruente. Bisectoarea unghiului ADC intersectează dreapta AB în M, iar dreapta BC în N. Demonstrați că triunghiul BMN este isoscel.
9. În patrulaterul convex $ABCD$ avem $AC \perp BD$, $\sphericalangle DAC = 60°$, $\sphericalangle DBC = 50°$ și $AO = OC$, unde $AC \cap BD = \{O\}$. Determinați măsurile unghiurilor patrulaterului $ABCD$.
10. În patrulaterul convex $ABCD$, măsura unghiului B este media aritmetică a măsurilor unghiurilor A și C, iar măsura unghiului C este media aritmetică a măsurilor unghiurilor B și D. Demonstrați că unghiurile A și D sunt suplementare.

Minitest

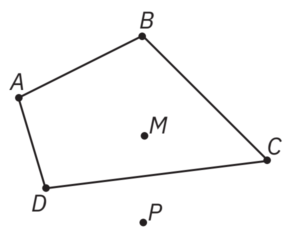


Figura 20

1. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ din Figura 20.
Precizați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a. $MP \cap ABCD \neq \varnothing$; **b.** $\text{Int}(ABMD) \cup \text{Int}(BMCD) = \text{Int}(ABCD)$;
c. patrulaterul $AMPD$ este convex; **d.** patrulaterul $CBMD$ este concav. **(3p)**

2. În patrulaterul convex $ABCD$ cu $\sphericalangle A = 60°$, măsurile unghiurilor B, C și D sunt direct proporționale cu numerele 3, 5 și 7. Determinați măsurile unghiurilor B, C și D. **(3p)**

3. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$. Perimetrul triunghiului ABD este de 25 cm și perimetrul triunghiului BCD este de 27 cm. Determinați lungimea diagonalei BD știind că $AB + BC + CD + DA = 32$ cm. **(3p)**

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

4.2

Lecția 2: Paralelogramul. Proprietăți

Cuvinte-cheie

paralelogram | unghiuri suplementare | înjumătățire | paralele

Paralelogramul

Mate practică

Analizăm fotografia alăturată, în care apar intersecțiile a două linii de tramvai. Notăm cu A, B, C, D cele patru puncte de intersecție.

Ce observăm?

Laturile opuse ale patrulaterului convex $ABCD$ format sunt paralele (Figura 1).

Definiție. Patrulaterul convex cu laturile opuse paralele două câte două se numește *paralelogram*.

Astfel, conform definiției:

- dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci $ABCD$ este patrulater convex, cu $AB \parallel CD$ și $AD \parallel BC$;
- dacă $ABCD$ este patrulater convex, cu $AB \parallel CD$ și $AD \parallel BC$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

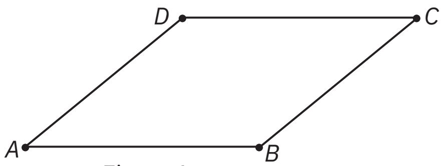


Figura 1

Proprietățile paralelogramului

De reținut

A. Proprietăți referitoare la laturi

Teorema 1. Într-un paralelogram, laturile opuse sunt congruente două câte două.

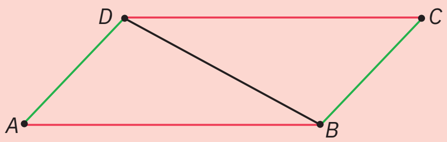


Figura 2

Ipoteză: $ABCD$ este paralelogram

Concluzie: $AB \equiv CD$
$AD \equiv BC$

Demonstrație:

Conform definiției, avem $AB \parallel CD$ și $AD \parallel BC$ (Figura 2). Observăm că:
$\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CBD$ (unghiuri alterne interne formate de dreptele paralele AD și BC cu secanta BD);
$\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB$ (unghiuri alterne interne formate de dreptele paralele AB și CD cu secanta BD).
Cum $DB \equiv BD$ (latură comună), deducem că $\Delta ADB \equiv \Delta CBD$ (cazul U.L.U.), de unde rezultă că $AB \equiv CD$ și $AD \equiv BC$.

Reciproca teoremei 1. Dacă într-un patrulater convex laturile opuse sunt congruente două câte două, atunci patrulaterul este paralelogram.

Ipoteză: $ABCD$ este patrulater convex
$AB \equiv CD$
$AD \equiv BC$

Concluzie: $ABCD$ este paralelogram

Demonstrație:

Comparăm triunghiurile ADB și CBD: avem $AB \equiv CD$, $AD \equiv BC$ și $BD \equiv BD$ (latură comună) (Figura 2). Ca urmare, $\Delta ABD \equiv \Delta CDB$ (cazul L.L.L.), de unde rezultă că $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB$ și $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CBD$.
Deoarece $\sphericalangle ABD$ și $\sphericalangle CDB$ sunt unghiuri alterne interne formate de dreptele AB și CD cu secanta BD, rezultă că $AB \parallel CD$. La fel, $\sphericalangle ADB$ și $\sphericalangle CBD$ sunt unghiuri alterne interne formate de dreptele AD și BC cu secanta BD, deci $AD \parallel BC$. Cum $AB \parallel CD$ și $AD \parallel BC$, patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

Teorema 2. Dacă într-un patrulater convex două laturi opuse sunt congruente și paralele, atunci patrulaterul este paralelogram.

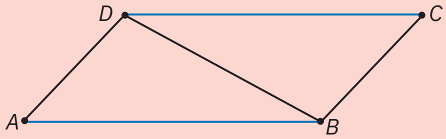


Figura 3

Ipoteză: $ABCD$ este patrulater convex.
$AB \equiv CD$
$AB \parallel CD$

Concluzie: $ABCD$ este paralelogram.

Demonstrație:
Construim diagonala BD (Figura 3). Deducem că $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB$, ca unghiuri alterne interne formate de dreptele paralele AB și CD cu secanta BD. Comparăm triunghiurile ABD și CDB. Deoarece $AB \equiv CD$, $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB$ și $BD \equiv DB$ (latură comună), rezultă că $\Delta ABD \equiv \Delta CDB$ (cazul L.U.L.). Obținem $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CBD$, de unde rezultă că $AD \parallel BC$. Întrucât avem și $AB \parallel CD$ (din ipoteză), conform definiției, patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

B. Proprietăți referitoare la unghiuri

Teorema 3. Într-un paralelogram, unghiurile alăturate sunt suplementare.

Figura 4

Ipoteză: $ABCD$ este paralelogram.

Concluzie: $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$; $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$
$\sphericalangle C + \sphericalangle D = 180°$; $\sphericalangle D + \sphericalangle A = 180°$

Demonstrație:
Deoarece $ABCD$ este paralelogram, rezultă că $AD \parallel BC$ și $AB \parallel CD$ (Figura 4).
Unghiurile BAD și ABC, formate de paralelele AD și BC cu secanta AB, sunt unghiuri interne de aceeași parte a secantei, deci sunt suplementare. Așadar, $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ABC = 180°$, adică $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$.
La fel, $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle BCD$ sunt suplementare, fiind unghiuri de aceeași parte a secantei BC la paralelele AB și CD, deci $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$. Asemănător se arată că $\sphericalangle C + \sphericalangle D = 180°$, respectiv $\sphericalangle D + \sphericalangle A = 180°$.

Reciproca teoremei 3. Dacă într-un patrulater convex un unghi este suplementar cu ambele unghiuri alăturate lui, atunci patrulaterul este paralelogram.

Ipoteză: $ABCD$ patrulater convex
$\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$
$\sphericalangle D + \sphericalangle A = 180°$.

Concluzie: $ABCD$ paralelogram

Demonstrație:
Unghiurile suplementare A și B sunt unghiuri interne de aceeași parte a secantei, formate de dreptele AD și BC cu secanta AB și atunci $AD \parallel BC$ (Figura 4). De asemenea, unghiurile suplementare A și D sunt unghiuri interne de aceeași parte a secantei, formate de dreptele AB și CD cu secanta AD și atunci $AB \parallel CD$.
Cum $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, conform definiției, patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

Teorema 4. Într-un paralelogram, unghiurile opuse sunt congruente două câte două.

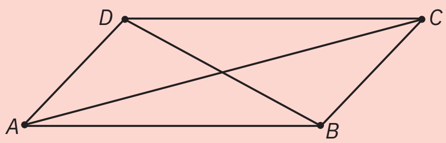


Figura 5

Ipoteză: $ABCD$ este paralelogram.

Concluzie: $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$
$\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$

Demonstrație:
Conform teoremei 3, avem $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$ și $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$, deci $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 180° - \sphericalangle B$. Așadar, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$. Asemănător, din $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$ și $\sphericalangle C + \sphericalangle D = 180°$, rezultă că $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$.

Reciproca teoremei 4. Dacă într-un patrulater convex unghiurile opuse sunt congruente două câte două, atunci patrulaterul este paralelogram.

Ipoteză: $ABCD$ patrulater convex
$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$
$\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$

Concluzie: $ABCD$ paralelogram

Demonstrație:
Deoarece $ABCD$ este patrulater convex, rezultă că $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360°$. Din $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle A$ și $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle B$, obținem $2 \cdot (\sphericalangle A + \sphericalangle B) = 360°$, deci $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$ (1). Cum $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle B$, avem și $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180°$ (2). Conform reciprocei Teoremei 3, rezultă că $ABCD$ este paralelogram.

C. Proprietăți referitoare la diagonale

Teorema 5. Într-un paralelogram diagonalele au același mijloc.

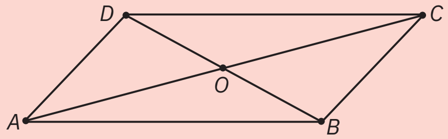


Figura 6

Ipoteză: $ABCD$ paralelogram
$AC \cap BD = \{O\}$

Concluzie: $AO \equiv CO$; $DO \equiv BO$

Demonstrație:
În paralelogramul $ABCD$ (Figura 6), $AD \parallel BC$ și $AD \equiv BC$, iar $\sphericalangle ADO \equiv \sphericalangle CBO$, deoarece sunt unghiuri alterne interne formate de dreptele paralele AD și BC cu secanta BD (1), $AD \equiv BC$ (2), iar $\sphericalangle DAO \equiv \sphericalangle BCO$, deoarece sunt unghiuri alterne interne formate de dreptele paralele AD și BC cu secanta AC (3). Din relațiile (1), (2) și (3), conform cazului de congruență U.L.U., $\Delta ADO \equiv \Delta CBO$, și atunci $AO \equiv CO$ și $DO \equiv BO$, ceea ce înseamnă că punctul O este mijlocul ambelor diagonale.

Reciproca teoremei 5. Dacă diagonalele unui patrulater convex au același mijloc, atunci patrulaterul este paralelogram.

Ipoteză: $ABCD$ patrulater convex
$AC \cap BD = \{O\}$
$AO \equiv CO$; $DO \equiv BO$

Concluzie: $ABCD$ paralelogram

Demonstrație:
Deoarece $AO \equiv CO$, $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$ (unghiuri opuse la vârf) și $BO \equiv DO$ rezultă că $\Delta AOB \equiv \Delta COD$ (cazul L.U.L.), deci $\sphericalangle ABO \equiv \sphericalangle CDO$ (Figura 6). Cum $\sphericalangle ABO$ și $\sphericalangle CDO$ sunt unghiuri alterne interne formate de dreptele AB și CD cu secanta BD, deducem că $AB \parallel CD$.
Deoarece $AO \equiv CO$, $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle COB$ (unghiuri opuse la vârf) și $DO \equiv BO$, conform cazului de congruență L.U.L., $\Delta AOD \equiv \Delta COB$ și rezultă că $\sphericalangle ADO \equiv \sphericalangle CBO$. Unghiurile congruente ADO și CBO sunt unghiuri alterne interne formate de dreptele AD și BC cu secanta BD și atunci $AD \parallel BC$.
Cum $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, conform definiției, patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

Situație-problemă

Centrul de simetrie

Fie $ABCD$ un paralelogram și $\{O\} = AC \cap BD$. Deoarece $AO \equiv OC$ și $BO \equiv OD$, deducem că simetricul unui vârf al paralelogramului față de punctul O este vârful opus.

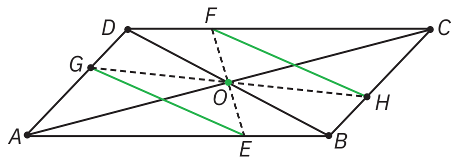


Figura 7

Se pune problema: fiind dat un punct pe una dintre laturile paralelogramului, unde se găsește simetricul acestui punct față de O?

Fie E un punct oarecare pe latura AB și $EO \cap CD = \{F\}$ (Figura 7).

Deoarece $\sphericalangle EAO \equiv \sphericalangle FCO$ (alterne interne), $AO \equiv CO$ și $\sphericalangle AOE \equiv \sphericalangle COF$ (opuse la vârf), rezultă că $\Delta AOE \equiv \Delta COF$ (cazul U.L.U.), deci $OE \equiv OF$. Așadar, punctul F este simetricul punctului E față de punctul O.

Fie G un punct oarecare pe latura AD și $GO \cap BC = \{H\}$. Cu același raționament arătăm că punctul H este simetricul punctului G față de punctul O. Deoarece punctele E și G au fost arbitrar alese, deducem că simetricul oricărui punct al paralelogramului față de punctul de intersecție al diagonalelor aparține paralelogramului.

De reținut

Definiție. Un punct O este *centru de simetrie* al unei figuri geometrice $\mathcal{F}$ dacă simetricul oricărui punct al figurii $\mathcal{F}$ față de punctul O este tot un punct al lui $\mathcal{F}$.

Justificarea unor proprietăți pe baza simetriei

Centrul de simetrie al unui paralelogram este punctul de intersecție al diagonalelor sale (numit și *centrul paralelogramului*).

- Cu notațiile din Figura 7, deoarece F este simetricul punctului E față de O și H este simetricul punctului G față de O, deducem că segmentul HF este simetricul segmentului EG față de O. Mai mult, cum $OE \equiv OF$, $\sphericalangle EOG \equiv \sphericalangle FOH$ și $OG \equiv OH$, rezultă că $\Delta EOG \equiv \Delta FOH$ și atunci $EG \equiv FH$, ceea ce înseamnă că segmentele simetrice față de centrul de simetrie al paralelogramului sunt congruente. (1)

- A și C, respectiv B și D sunt simetrice față de centrul O al paralelogramului $ABCD$ și astfel, pe baza simetriei, regăsim proprietatea că diagonalele paralelogramului au același mijloc.
- A și C, respectiv B și D sunt simetrice față de punctul O și atunci laturile AB și CD, respectiv AD și BC sunt simetrice față de centrul O al paralelogramului $ABCD$. Conform (1), rezultă $AB \equiv CD$ și $AD \equiv BC$ și astfel, pe baza simetriei, regăsim proprietatea că laturile opuse sunt congruente două câte două.

Modalități uzuale pentru construcția unui paralelogram

1. Utilizând reciproca teoremei 5

Desenăm două segmente necongruente, diferite, care au același mijloc. Extremitățile celor două segmente sunt vârfurile unui paralelogram.

2. Utilizând Teorema 2

Desenăm două segmente congruente și paralele. Extremitățile celor două segmente sunt vârfurile unui paralelogram.

Activitate practică

Tăiați patru stinghii de lemn, două câte două de aceeași lungime, și dați găuri la ambele capete ale fiecărei stinghii. Cu patru nituri montate în găuri, realizați un *paralelogram articulat*, ca în Figura 8. Apropiind sau depărtând două stinghii consecutive, obținem un nou paralelogram.

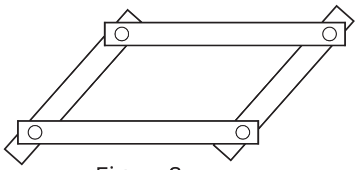


Figura 8

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. În cercul $\mathcal{C}(O, r)$, coarda AC este diametru, iar B și D sunt două puncte interioare cercului, astfel încât $AC \cap BD = \{O\}$ și $OB \equiv OD$ (Figura 9). Arătați că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

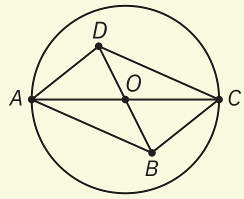


Figura 9

Demonstrație:
Coarda AC este diametru în cercul $\mathcal{C}(O, r)$ și atunci $OA \equiv OC$. Deoarece $OA \equiv OC$ și $OB \equiv OD$, rezultă că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

2. Prin vârful A al triunghiului ABC se construiește o dreaptă paralelă cu BC, care intersectează în E paralela prin punctul B la AC. În semiplanul determinat de dreapta BC și punctul A, prin punctul C se construiește o dreaptă paralelă cu AB, pe care se ia un punct D, astfel încât $CD \equiv AB$ (Figura 10). Arătați că:
a. patrulaterul $AEBC$ este paralelogram; b. punctele E, A, D sunt coliniare.

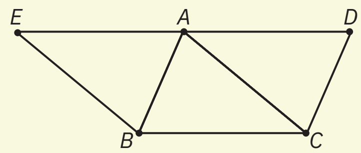


Figura 10

Demonstrație:
a. $AE \parallel BC$ și $BE \parallel AC$. Conform definiției, patrulaterul $AEBC$ este paralelogram.
b. $CD \parallel AB$ și $CD \equiv AB$ și atunci patrulaterul $ABCD$ este paralelogram (1).
Din relația (1) rezultă $AD \parallel BC$. Punctul $A \notin BC$, $EA \parallel BC$, $AD \parallel BC$, deci, conform *axiomei paralelelor*, dreptele AE și AD coincid. Așadar punctele distincte E, A, D sunt coliniare.

3. Patrulaterul $ABCD$ din Figura 11 este paralelogram, cu $AC \cap BD = \{O\}$. Punctul M este mijlocul laturii CD, punctul E este simetricul punctului A față de M, iar punctele F și D sunt simetrice față de punctul A. Arătați că:
a. $AD \parallel CE$; b. $\sphericalangle FDE \equiv \sphericalangle FBE$; c. dreptele AC, BD și EF sunt concurente.

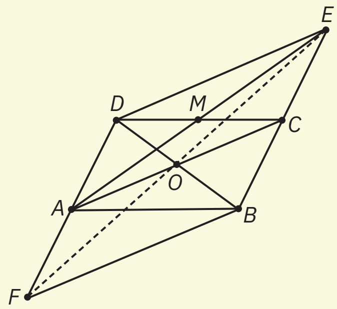


Figura 11

Demonstrație:
a. Punctul E este simetricul punctului A față de M, deci punctul M este mijlocul segmentului AE. Deoarece M este și mijlocul segmentului CD, rezultă că patrulaterul $ACED$ este paralelogram, deci $AD \parallel CE$.
b. Întrucât $C \notin AD$, $BC \parallel AD$ și $CE \parallel AD$, din axioma paralelelor deducem că dreptele BC și CE coincid. Ca urmare, $AD \parallel BE$ și $BE = BC + CE$. Cum $CE = AD$ (deoarece $ACED$ este paralelogram), obținem $BE = BC + AD = 2 \cdot AD$. Punctele F și D sunt simetrice față de punctul A, deci $FD = 2 \cdot AD = BE$. Deoarece $FD \equiv BE$ și $FD \parallel BE$, deducem că $BEDF$ este paralelogram și atunci $\sphericalangle FDE \equiv \sphericalangle FBE$.
c. Punctul O este mijlocul diagonalelor AC și BD ale paralelogramului $ABCD$. Cum BD este diagonală și în paralelogramul $BEDF$, rezultă că O este și mijlocul celeilalte diagonale a lui $BEDF$, și anume EF. Așadar, segmentele AC, BD și EF au același mijloc, O. Prin urmare, dreptele AC, BD și EF sunt concurente.

4.2

Probleme propuse

1. a. Construiți un paralelogram $ABCD$ știind că măsura unghiului A este egală cu $30°$.
   b. Construiți un paralelogram $ABCD$ știind că $AC = 4$ cm și $BD = 6$ cm.
   c. Construiți un paralelogram $ABCD$ știind că $AB = 3$ cm și $BC = 5$ cm.
   d. Construiți paralelogramul $ABCD$ știind că $AB = 4$ cm, $\sphericalangle A = 70°$ și $AC = 5$ cm.
2. a. În paralelogramul $ABCD$ măsura unghiului ABC este egală cu $50°$. Determinați măsurile unghiurilor A, C și D ale paralelogramului $ABCD$.
   b. În paralelogramul $ABCD$, măsura unghiului BAD este egală cu $120°$. Determinați măsurile unghiurilor B, C și D ale paralelogramului $ABCD$.
   c. În paralelogramul $ABCD$ măsura unghiului BAC este egală cu $20°$ și măsura unghiului BCA este egală cu $50°$. Determinați măsurile unghiurilor A, B, C și D ale paralelogramului $ABCD$.
3. În paralelogramul $ABCD$ avem $AC \cap BD = \{O\}$, $AB = 10$ cm, $AC = 12$ cm și $DB = 16$ cm. Calculați perimetrul triunghiului DOC.
4. Se consideră paralelogramul $MNPQ$ astfel încât $MN = 3x + 2$ cm, $NP = 4x + 1$ cm și $PQ = 5x - 2$ cm. Calculați suma lungimilor laturilor paralelogramului.
5. În paralelogramul $MNPQ$ avem $\sphericalangle M = 2x + 3°$ și $\sphericalangle P = 3x - 27°$. Determinați măsurile unghiurilor paralelogramului $MNPQ$.
6. Patrulaterul convex $ABCD$ are $\sphericalangle A = x + 16°$, $\sphericalangle B = 2x + 2°$, $\sphericalangle C = \frac{3}{2}x - 11°$ și $\sphericalangle D = \frac{7}{3}x - 16°$. Demonstrați că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.
7. În Figura 12 este reprezentat un triunghi ascuțitunghic ABC. Dacă punctele S și T sunt simetricele punctelor B și C față de mijloacele laturilor AC, respectiv AB, atunci arătați că punctele T, A, S sunt coliniare.

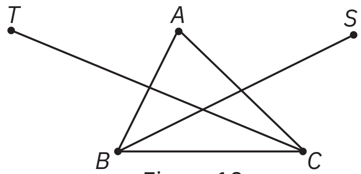


Figura 12

8. Se consideră paralelogramul $ABCD$. Bisectoarea unghiului A intersectează latura DC în punctul P, iar bisectoarea unghiului BCD intersectează latura AB în punctul Q. Arătați că patrulaterul $APCQ$ este paralelogram.
9. Bisectoarele unghiurilor A și B ale paralelogramului $ABCD$ se intersectează pe latura CD în punctul P (Figura 13). Determinați măsura unghiului APB.

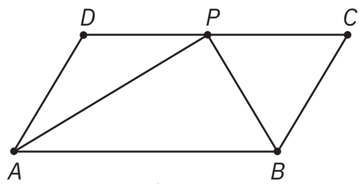


Figura 13

10. Pe latura AB a paralelogramului $ABCD$ se consideră punctul P, iar pe latura DC se consideră punctul Q, astfel încât $AP = QC$. Demonstrați că patrulaterul $APCQ$ este paralelogram.
11. Se consideră paralelogramul $ABCD$ în care $AD = DB$ și punctul M este mijlocul laturii DC. Perpendiculara din C pe dreapta BD intersectează pe BM în P. Demonstrați că dreptele AD și DP sunt perpendiculare.

Minitest

1. În paralelogramul $ABCD$, măsura unghiului A este egală cu $40°$. Determinați măsurile unghiurilor B, C și D ale paralelogramului $ABCD$. **(3p)**
2. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Precizați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:
   a. Dacă $AB = 2$ cm și $BC = 3$ cm, atunci perimetrul paralelogramului $ABCD$ este egal cu 5 cm.
   b. Dacă $AO = 4$ cm, $BO = 7$ cm și $DC = 6$ cm, atunci perimetrul triunghiului AOB este egal cu 17 cm.
   c. Triunghiurile AOD și COB sunt congruente.
   d. Unghiurile BAC și DCA sunt suplementare.
   e. Dacă $BD \perp AD$, $\sphericalangle BAD = 30°$ și $BD = 6$ cm, atunci $DC = 3$ cm.
   f. Dacă $AO = OD = AD$, atunci măsura unghiului ACB este egală cu $60°$. **(3p)**
3. În triunghiul ABC, punctul D este mijlocul segmentului BC. Paralela prin B la dreapta AC intersectează dreapta AD în punctul E. Demonstrați că patrulaterul $ABEC$ este paralelogram. **(3p)**

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Lecția 3: Aplicații ale paralelogramului în geometria triunghiului. Linia mijlocie în triunghi, centrul de greutate al unui triunghi

Cuvinte-cheie

mijlocul unui segment | linie mijlocie | centru de greutate | mediană | concurență | paralele

Linia mijlocie a unui triunghi

De reținut

Definiție. Segmentul cu extremitățile în mijloacele a două laturi ale unui triunghi se numește *linie mijlocie* a triunghiului.

Orice triunghi are trei linii mijlocii. În Figura 1, punctele M, D, P sunt mijloacele laturilor AB, BC și respectiv AC ale triunghiului ABC. Segmentele MD, DP și MP sunt cele trei linii mijlocii ale triunghiului ABC.

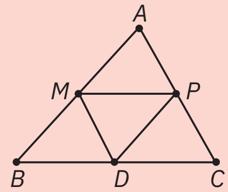


Figura 1

Situație-problemă

În Figura 2, triunghiul ABC este echilateral, iar punctele M și P sunt mijloacele laturilor AB și respectiv AC.

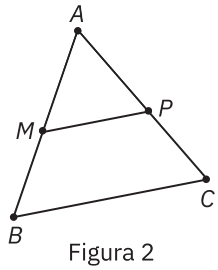


Figura 2

- ΔABC este echilateral și atunci $AB \equiv AC \equiv BC$ și $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60°$.
- Punctele M și P sunt mijloacele laturilor AB, respectiv AC, deci $AM = \frac{AB}{2}$, $AP = \frac{AC}{2}$ și, ținând cont că $AB \equiv AC$, deducem că $AM \equiv AP$.
- Întrucât $AM \equiv AP$ și $\sphericalangle A = 60°$, rezultă că triunghiul AMP este echilateral. Atunci $\sphericalangle AMP = 60°$ și $MP = AM = \frac{AB}{2} = \frac{BC}{2}$.
- Având măsurile egale, rezultă $\sphericalangle AMP \equiv \sphericalangle B$ și, ținând cont că au poziția de unghiuri corespondente formate de dreptele MP și BC cu secanta AB, deducem că $MP \parallel BC$.
- Deoarece punctele M, P sunt mijloacele laturilor AB, respectiv AC, conform definiției, segmentul MP este linie mijlocie în triunghiul echilateral ABC. Are proprietățile: $MP \parallel BC$ și $MP = \frac{BC}{2}$.

Vom demonstra că aceste proprietăți ale liniei mijlocii, identificate în triunghiul echilateral, sunt valabile în orice triunghi.

De reținut

Teorema 1 (proprietatea liniei mijlocii a unui triunghi). În orice triunghi, linia mijlocie determinată de mijloacele a două laturi ale triunghiului este paralelă cu a treia latură și are lungimea egală cu jumătate din lungimea acesteia.

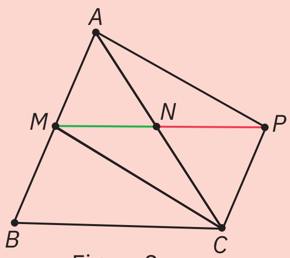


Figura 3

Ipoteză: ΔABC
$AM \equiv MB$, $M \in AB$
$AN \equiv NC$, $N \in AC$

Concluzie: $MN \parallel BC$ și $MN = \frac{1}{2} \cdot BC$

Demonstrație:
Construim simetricul P al punctului M față de N. Punctul N este atât mijlocul segmentului MP, cât și al segmentului AC, deci patrulaterul $AMCP$ este paralelogram. Așadar, $CP \parallel AM$ și $CP = AM$.
Cum $CP = AM = MB$, deducem că $CP \parallel MB$ și $CP \equiv MB$, deci $BCPM$ este paralelogram.

În consecință, $MP \parallel BC$ și $MP \equiv BC$. Cum $MP = 2 \cdot MN$, obținem $MN \parallel BC$ și $MN = \frac{1}{2} \cdot BC$.

Teorema 2 (prima reciprocă a teoremei 1). Dacă într-un triunghi *ABC* punctul *M* este mijlocul laturii *AB*, iar punctul *N* aparține laturii *AC*, astfel încât $MN \parallel BC$, atunci *N* este mijlocul laturii *AC*.

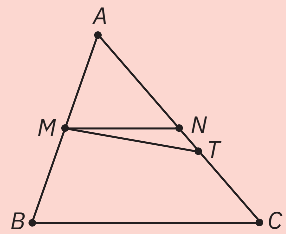


Figura 4

Demonstrație:

Presupunem, prin absurd, că punctul *N* nu este mijlocul laturii *AC*. Atunci există un punct $T \neq N$ astfel încât punctul *T* este mijlocul laturii *AC* (Figura 4). Segmentul *MT* este linie mijlocie în triunghiul *ABC*, deci $MT \parallel BC$. Cum $MT \parallel BC$ și $MN \parallel BC$, dreptele *MN* și *MT* coincid. Întrucât punctele *N* și *T* aparțin atât laturii *AC*, cât și paralelei prin *M* la *BC*, deducem că $T = N$, contradicție cu $T \neq N$.

Prin urmare, presupunerea făcută este falsă, deci punctul *N* este mijlocul laturii *AC*.

Teorema 3 (a doua reciprocă a teoremei 1). Dacă într-un triunghi *ABC*, punctele *M* și *N* aparțin laturilor *AB*, respectiv *AC*, astfel încât $MN \parallel BC$ și $MN = \frac{1}{2} \cdot BC$, atunci segmentul *MN* este linie mijlocie în triunghiul *ABC*.

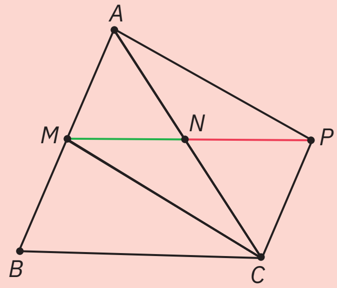


Figura 5

Demonstrație:

Prelungim segmentul *MN* cu segmentul *NP*, astfel încât $MN \equiv NP$ (Figura 5). Așadar, $MN = \frac{1}{2} \cdot MP$ și, cum $MN = \frac{1}{2} \cdot BC$, rezultă că $MP \equiv BC$. Întrucât $MP \parallel BC$ și $MP \equiv BC$, patrulaterul *BCPM* este paralelogram, deci $BM \parallel CP$ (adică $AB \parallel CP$) și $BM \equiv CP$.

Unghiurile *AMP* și *CPN* sunt alterne interne formate de dreptele paralele *AB* și *CP* cu secanta *MP*, deci $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle CPN$.

Deoarece $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle CPN$, $MN \equiv NP$ și $\sphericalangle ANM \equiv \sphericalangle CNP$ (unghiuri opuse la vârf), rezultă că $\Delta AMN \equiv \Delta CPN$ (U.L.U.), deci $AN \equiv CN$ și $AM \equiv CP$. Dar $BM \equiv CP$, deci $AM \equiv BM$.

Cum $AN \equiv CN$ și $AM \equiv BM$, rezultă că segmentul *MN* este linie mijlocie în triunghiul *ABC*.

Centrul de greutate al unui triunghi

De reținut

Teorema 4. În orice triunghi, medianele sunt concurente într-un punct numit *centrul de greutate al triunghiului*.

Pe fiecare mediană, centrul de greutate este situat la două treimi de vârful triunghiului și la o treime de mijlocul laturii opuse acestuia.

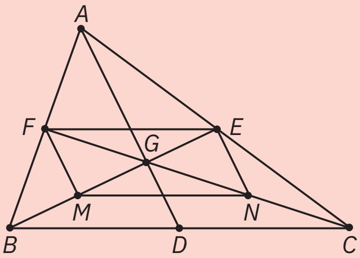


Figura 6

Ipoteză: ΔABC, $D \in BC$, $E \in CA$, $F \in AB$
$DB \equiv DC$, $EA \equiv EC$, $FA \equiv FB$

Concluzie: $AD \cap BE \cap CF = \{G\}$
$GD = \frac{1}{3} \cdot AD$, $GE = \frac{1}{3} \cdot BE$, $GF = \frac{1}{3} \cdot CF$

Demonstrație:

Presupunând, prin absurd, că dreptele *BE* și *CF* sunt paralele, ar rezulta că unghiurile *EBC* și *FCB*, formate de *BE* și *CF* cu secanta *BC*, ar fi suplementare (ca unghiuri de aceeași parte a secantei), ceea ce este fals, deoarece $\sphericalangle EBC + \sphericalangle FCB < \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB < 180°$ (Figura 6).

Ca urmare, dreptele *BE* și *CF* nu sunt paralele, deci există un punct *G* astfel încât $BE \cap CF = \{G\}$.

Segmentul *EF* este linie mijlocie în triunghiul *ABC*, deci $EF \parallel BC$ și $EF = \frac{1}{2} \cdot BC$.

Fie *M*, *N* mijloacele segmentelor *BG*, respectiv *CG*. Segmentul *MN* este linie mijlocie în triunghiul *GBC*, deci $MN \parallel BC$ și $MN = \frac{1}{2} \cdot BC$. În consecință, $EF \parallel MN$ și $EF \equiv MN$, deci patrulaterul *EFMN* este paralelogram.

Deducem că *G* este mijlocul comun al diagonalelor *ME* și *NF*. Obținem $BM \equiv MG \equiv GE$, respectiv $CN \equiv NG \equiv GF$, deci $GE = \frac{1}{3} \cdot BE$ și $GF = \frac{1}{3} \cdot CF$.

Analog se demonstrează că medianele AD și BE sunt concurente într-un punct G' astfel încât $G'E = \frac{1}{3} \cdot BE$ și $G'D = \frac{1}{3} \cdot AD$ (Figura 7). Deoarece $GE = G'E = \frac{1}{3} \cdot BE$, deducem că punctele G și G' coincid, ceea ce arată că $AD \cap BE \cap CF = \{G\}$ și $GD = \frac{1}{3} \cdot AD$.

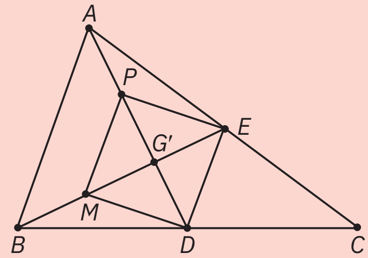


Figura 7

Observații

1. Pentru a construi centrul de greutate al unui triunghi ABC este suficient să construim o singură mediană, AM, cu $M \in BC$, pe care să o împărțim în trei segmente congruente. Centrul de greutate va fi situat pe AM, astfel încât $AM = 3 \cdot GM$.
2. Dacă un triunghi este echilateral, atunci centrul său de greutate coincide cu centrul cercului înscris în triunghi, cu centrul cercului circumscris triunghiului și cu ortocentrul triunghiului.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. În Figura 9, patrulaterul $ABCD$ este convex, iar punctele M, N, P și Q sunt mijloacele laturilor AB, BC, CD și respectiv DA. Arătați că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

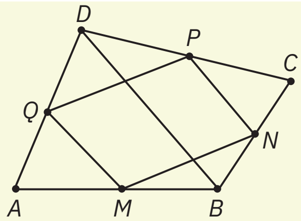


Figura 9

Demonstrație:
Segmentul MQ este linie mijlocie în triunghiul ABD, deci $MQ \parallel BD$ și $MQ = \frac{BD}{2}$ (1).

Similar, segmentul NP este linie mijlocie în triunghiul CBD, deci $NP \parallel BD$ și $NP = \frac{BD}{2}$ (2).

Din relațiile (1) și (2) rezultă că $MQ \parallel NP$ și $MQ \equiv NP$, deci patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

Notă istorică. Patrulaterul $MNPQ$ poartă numele de *patrulaterul lui Varignon*, după numele matematicianului francez Pierre Varignon care a publicat această demonstrație în anul 1731. Segmentele MP și NQ se numesc *bimedianele* patrulaterului $ABCD$.

2. Se consideră punctele M și N mijloacele laturilor AB și CD ale paralelogramului $ABCD$ (Figura 10). Arătați că $AE = EF = FC$, unde $DM \cap AC = \{E\}$ și $BN \cap AC = \{F\}$.

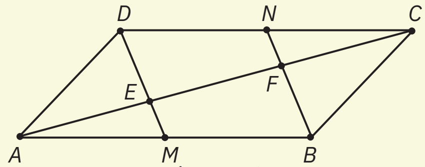


Figura 10

Demonstrație:
Patrulaterul $ABCD$ este paralelogram, deci $AB \parallel CD$ și $AB \equiv CD$ (2).

Deoarece $MB = \frac{1}{2} \cdot AB$ și $ND = \frac{1}{2} \cdot CD$, rezultă că $MB = ND$. Evident, avem și $MB \parallel ND$, deci patrulaterul $BNDM$ este paralelogram, și atunci $BN \parallel DM$. În particular, avem $ME \parallel BF$ și $NF \parallel DE$. În triunghiul ABF, punctul M este mijlocul laturii AB, iar $ME \parallel BF$. Conform Teoremei 2, punctul E este mijlocul segmentului AF, de unde rezultă $AE \equiv EF$. În triunghiul CDE, punctul N este mijlocul laturii CD, iar $NF \parallel DE$ și atunci punctul F este mijlocul segmentului EC, de unde rezultă $EF \equiv FC$.
Deoarece $AE \equiv EF$ și $EF \equiv FC$, obținem $AE \equiv EF \equiv FC$.

3. În paralelogramul $ABCD$, punctul E este mijlocul laturii CD. Fie $AE \cap BC = \{F\}$. Arătați că punctul C este mijlocul segmentului BF (Figura 11).

Demonstrație:
Patrulaterul $ABCD$ este paralelogram, deci $AB \parallel CD$ (1) și $AB \equiv CD$ (2).

Cum punctul E este mijlocul laturii CD, avem $EC = \frac{CD}{2} = \frac{AB}{2}$.

Relația (1) este echivalentă cu $EC \parallel AB$. În triunghiul ABF, $EC \parallel AB$ și $EC = \frac{AB}{2}$.

Conform Teoremei 3, segmentul EC este linie mijlocie în triunghiul ABF, deci punctul C este mijlocul segmentului BF.

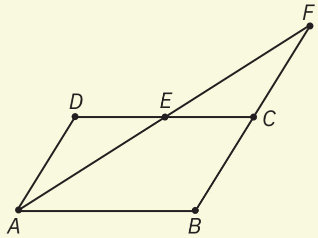


Figura 11

4.3

Probleme propuse

1. În triunghiul ABC, punctele M și P sunt mijloacele laturilor AB și AC.

a. Dacă $MP = 9$ cm, atunci calculați lungimea laturii BC.

b. Dacă $BC = 16$ cm, atunci calculați lungimea liniei mijlocii MP.

c. AQ este mediană în triunghiul ABC și $MQ = 7$ cm. Calculați lungimea laturii AC.

2. În triunghiul ABC, punctele M, P și Q sunt mijloacele laturilor AB, BC, respectiv CA.

a. Perimetrul triunghiului ABC este 28 cm. Determinați perimetrul triunghiului MPQ.

b. Perimetrul triunghiului MPQ este de 17 cm. Determinați perimetrul triunghiului ABC.

3. Se consideră medianele MA, PB și QC ale triunghiul MPQ, concurente în punctul G.

a. Dacă $MA = 12$ cm, atunci determinați lungimile segmentelor MG și GA.

b. Dacă $PG = 10$ cm, atunci determinați lungimile segmentelor GB și PB.

c. Dacă $CG = 3$ cm, atunci determinați lungimile segmentelor GQ și CQ.

4. În paralelogramul $ABCD$, punctul E este mijlocul laturii AB. Fie F punctul de intersecție al dreptelor CE și AD și $AC \cap BD = \{O\}$.

a. Arătați că OE este linie mijlocie în triunghiul CAF. **b.** Arătați că AO este linie mijlocie în triunghiul BDF.

c. Dacă $CF \cap BD = \{T\}$, atunci demonstrați că punctul T este centrul de greutate al triunghiului ABC.

5. Fie punctele M și P mijloacele laturilor AB și AC ale triunghiului ABC. Dacă D este un punct oarecare pe latura BC și $AD \cap MP = \{T\}$, atunci demonstrați că $AT = TD$.

6 Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se consideră punctele $S, M \in AB$, respectiv $T, P \in AC$ astfel încât $AM = MB$, $AS = SM$, $AP = PC$, $AT = TP$ și $ST = 6$ cm. Determinați lungimea segmentului BC.

7. Fie punctele M și P mijloacele laturilor AB și AC ale triunghiului ABC. Dacă $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm și $\mathcal{P}_{ABC} = 23$ cm, calculați perimetrul patrulaterului $MPCB$.

8. În Figura 12, punctul O este exterior triunghiului ABC. Notăm cu P și Q simetricele punctului O față de mijloacele laturilor AC și BC. Dacă punctele S și T sunt mijloacele laturilor AC și BC, atunci:

a. Arătați că ST este linie mijlocie în triunghiul OPQ.

b. Demonstrați că patrulaterul $ABQP$ este paralelogram.

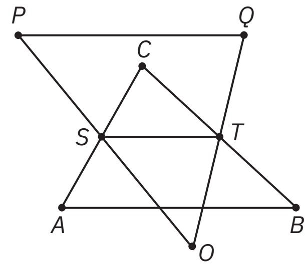


Figura 12

9. În paralelogramul $ABCD$, $AB = 12$ cm, $BC = 18$ cm și $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă G_1, G_2, G_3 și G_4 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor AOB, BOC, COD, respectiv DOA, atunci demonstrați că:

a. $G_1G_3 = 12$ cm și $G_2G_4 = 8$ cm; **b.** patrulaterul $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram.

Indicație: Demonstrați că punctele G_1, O, G_3 sunt coliniare.

10. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Punctele M și P sunt mijloacele segmentelor DC și AB, iar $AM \cap BD = \{T\}$, $CP \cap BD = \{S\}$. Dacă $BD = 18$ cm, atunci calculați lungimea segmentului ST.

11. Fie triunghiurile echilaterale congruente ABC și DCE, astfel încât punctele A, C, E să fie coliniare și punctele B, C, D să fie coliniare. Dacă punctul T este mijlocul segmentului BC și $ET \cap AB = \{S\}$, arătați că $SB = \dfrac{CD}{3}$.

Indicație: Construiți punctul Q, mijlocul segmentului AS.

Minitest

1. În triunghiul ABC se consideră punctele S, T, Q mijloacele laturilor AB, BC, respectiv AC. Dacă $AB = 10$ cm, $ST = 7$ cm și $BC = 16$ cm, atunci determinați lungimile segmentelor TQ, AC, respectiv SQ. **(3p)**

2. Se consideră triunghiul ABC și punctul D pe latura BC. Dacă punctele M, P și Q sunt mijloacele segmentelor AB, AD, respectiv AC, atunci demonstrați că punctele M, P și Q sunt coliniare. **(3p)**

3. Dacă punctele A', B' și C' sunt mijloacele laturilor BC, AC, respectiv AB ale triunghiului ABC, atunci demonstrați că patrulaterul $A'B'C'B$ este paralelogram. **(3p)**

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Lecția 4: Dreptunghiul. Proprietăți

Cuvinte-cheie

dreptunghi | lățime | diagonale | perpendiculară | lungime | unghiuri drepte

Dreptunghiul

Mate practică

Observăm că cele patru geamuri de sticlă transparentă ale acvariului din imaginea alăturată au forma unor paralelograme. Mai mult, toate unghiurile sunt drepte. De asemenea, tabla, pereții, ferestrele, ușa, coperta cărții prezintă aceleași caracteristici.

De reținut

Definiție. Paralelogramul cu un unghi drept se numește dreptunghi.

Astfel, conform definiției:
- dacă *ABCD* este paralelogram cu un unghi drept, atunci *ABCD* este dreptunghi;
- dacă *ABCD* este dreptunghi, atunci *ABCD* este paralelogram cu un unghi drept (Figura 1).

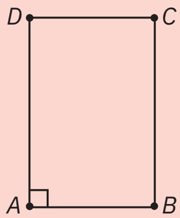


Figura 1

Știați că...?

În terminologia matematică românească, denumirea de *dreptunghi* a fost introdusă de către Gheorghe Asachi, întemeietorul învățământului în Moldova.

Proprietățile dreptunghiului

De reținut

Fiind un paralelogram, dreptunghiul are toate proprietățile acestuia:
- laturile opuse sunt paralele și congruente, două câte două;
- unghiurile opuse sunt congruente două câte două, iar unghiurile alăturate sunt suplementare;
- diagonalele au același mijloc.

Fiind un tip *particular* de paralelogram, dreptunghiul are și alte proprietăți, numite proprietăți caracteristice.

Teorema 1. Într-un dreptunghi, toate unghiurile sunt unghiuri drepte.
Ipoteză: *ABCD* este dreptunghi.
Concluzie: $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90°$

Demonstrație:
Conform definiției, *ABCD* este paralelogram și are un unghi drept (Figura 1). Presupunem, de exemplu, că $\sphericalangle A = 90°$.
Unghiurile alăturate ale unui paralelogram sunt suplementare; așadar $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$, deci $\sphericalangle B = 90°$.
Unghiurile opuse ale unui paralelogram sunt congruente două câte două, deci $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle A$ și $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle B$. Prin urmare, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90°$.

Reciproca teoremei 1. Dacă un patrulater are trei unghiuri drepte, atunci el este dreptunghi.

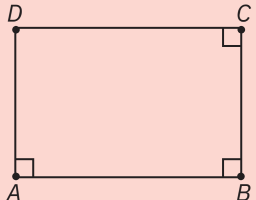


Figura 2

Ipoteză: *ABCD* este patrulater.
$\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 90°$
Concluzie: *ABCD* este dreptunghi.

Demonstrație:
Deoarece $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360°$, rezultă $\sphericalangle D = 90°$, deci $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90°$. Ca urmare, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$. Fiind patrulater cu unghiurile opuse congruente două câte două, *ABCD* este paralelogram. Având și un unghi drept, de exemplu $\sphericalangle A = 90°$, patrulaterul *ABCD* este dreptunghi (Figura 2).

Teorema 2. Într-un dreptunghi, diagonalele sunt congruente.

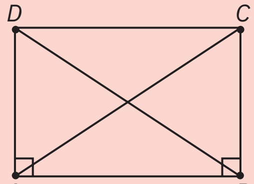


Figura 3

Ipoteză: *ABCD* este dreptunghi.
Concluzie: $AC \equiv BD$

Demonstrație:
Comparăm triunghiurile *ABC* și *BAD* (Figura 3). Avem $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD = 90°$, $AB \equiv BA$ (ca latură comună) și $BC \equiv AD$ (ca laturi opuse în dreptunghi). Deducem că $\Delta ABC \equiv \Delta BAD$ (cazul C.C.), deci $AC \equiv BD$.

Reciproca teoremei 2. Dacă diagonalele unui paralelogram sunt congruente, atunci paralelogramul este dreptunghi.
Ipoteză: *ABCD* este paralelogram.
$AC \equiv BD$.
Concluzie: *ABCD* este dreptunghi.

Demonstrație:
Comparăm triunghiurile *ABC* și *BAD* (Figura 3). Avem $AB \equiv BA$ (ca latură comună), $BC \equiv AD$ (ca laturi opuse în paralelogram) și $AC \equiv BD$ (din ipoteză). Rezultă că $\Delta ABC \equiv \Delta BAD$ (cazul L.L.L.), deci $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BAD$.
Dar $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAD = 180°$, deoarece unghiurile alăturate ale unui paralelogram sunt suplementare. Ca urmare, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD = 90°$. Așadar, paralelogramul *ABCD* are un unghi drept, deci este dreptunghi.

Observații

1. Un dreptunghi are două axe de simetrie, și anume mediatoarele laturilor opuse.
2. Punctul de intersecție al axelor de simetrie, care coincide cu intersecția diagonalelor dreptunghiului, este centru de simetrie al dreptunghiului.

Așadar, privind dreptunghiul ca mulțimea punctelor aflate pe laturile sale și considerând *M* un punct oarecare al dreptunghiului, rezultă că:

- simetricul punctului *M* față de mediatoarea oricărei laturi este punct al dreptunghiului;
- simetricul punctului *M* față de punctul de intersecție al diagonalelor aparține dreptunghiului.

De exemplu, în Figura 4, punctul *E* este un situat pe latura *AD* a dreptunghiului *ABCD*. Simetricul punctului *E* față de mediatoarea laturii *AB* este punctul *F*, aflat pe latura *BC*, iar simetricul lui *E* față de centrul de simetrie *O* este punctul *G*, situat pe latura *BC*.

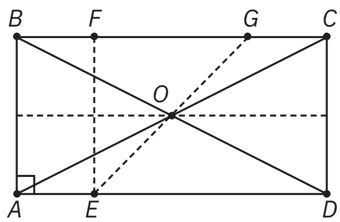


Figura 4

Modalități uzuale de construcție a unui dreptunghi

Situație-problemă

1. Utilizând reciproca teoremei 2
Desenăm două segmente congruente, diferite, care au același mijloc.
Extremitățile celor două segmente sunt vârfurile unui dreptunghi.

2. Utilizând un triunghi dreptunghic
Prin vârfurile unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic desenăm paralele cu catetele triunghiului.
Intersecția paralelelor și cele trei vârfuri ale triunghiului reprezintă cele patru vârfuri ale dreptunghiului.

Istoria matematicii

Dreptunghiul de aur este un dreptunghi ale cărui dimensiuni sunt bazate pe secțiunea de aur (Figura 6).

În Figura 6, $L = a + b$ și $l = a$. Secțiunea de aur este primul număr irațional definit și descoperit în istorie. Secțiunea de aur a segmentului $a + b$ din Figura 7 este realizată atunci când $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$.

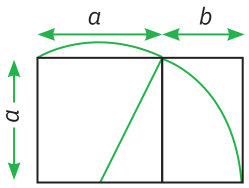


Figura 6

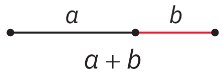


Figura 7

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Într-un triunghi ABC, punctul M este mijlocul laturii BC. Fie $MN \perp AB$ și $MP \perp AC$, cu $N \in AB$ și $P \in AC$. Știind că $BC = 2 \cdot AM$, arătați că $AM \equiv NP$.

Demonstrație:
Din ipoteză, rezultă că AM este mediană în triunghiul ABC. Ținând cont că $BC = 2 \cdot AM$, rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic în A, deci $\sphericalangle BAC = 90°$ (Figura 8). Cum $MN \perp AB$ și $MP \perp AC$, rezultă $\sphericalangle MNA = 90°$ și $\sphericalangle MPA = 90°$. Având trei unghiuri drepte, patrulaterul $APMN$ este dreptunghi și atunci $AM \equiv NP$.

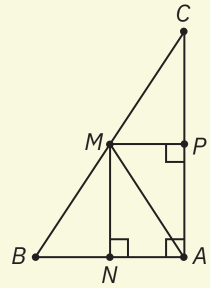


Figura 8

2. În cercul $\mathcal{C}(O, r)$, coardele AC și BD sunt diametre. Arătați că patrulaterul $ABCD$ este dreptunghi.

Demonstrație:
Întrucât AC și BD sunt diametre, centrul O al cercului este atât mijlocul segmentului AC, cât și mijlocul segmentului BD (Figura 9). Ca urmare, $ABCD$ este paralelogram. Ținând cont că $AC = BD = 2r$, diagonalele paralelogramului $ABCD$ sunt congruente, deci $ABCD$ este dreptunghi.

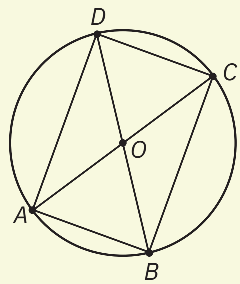


Figura 9

3. Se consideră paralelogramul $ABCD$, cu $\sphericalangle BAD = 120°$, $AB = 8$ cm și $AD = 4$ cm. Bisectoarea unghiului BAD intersectează dreptele DC și BC în punctele E, respectiv F. Arătați că patrulaterul $ACFD$ este dreptunghi.

Demonstrație:
Semidreapta AE este bisectoarea unghiului BAD, deci $\sphericalangle BAF = 120° : 2 = 60°$.
În paralelogramul $ABCD$, unghiurile BAD și ABF sunt suplementare și, cum $\sphericalangle BAD = 120°$, rezultă că $\sphericalangle ABF = 60°$ (Figura 10).
Din ipoteză rezultă $AD \parallel BC$ și $BC = AD = 4$ cm. Cum $\sphericalangle BAF = \sphericalangle ABF = 60°$, triunghiul ABF este echilateral, deci $AF = BF = AB = 8$ cm. Atunci $CF = BF - BC = 8\text{ cm} - 4\text{ cm} = 4\text{ cm} = AD$. Deoarece $BC = CF$, punctul C este mijlocul segmentului BF, deci AC este mediană în ΔABF echilateral. Rezultă că AC este și înălțime în ΔABF, deci $AC \perp BF$, de unde $\sphericalangle ACF = 90°$. Deoarece $AD \parallel CF$ și $AD \equiv CF$, rezultă că $ACFD$ este paralelogram. Cum $\sphericalangle ACF = 90°$, deducem că $ACFD$ este dreptunghi.

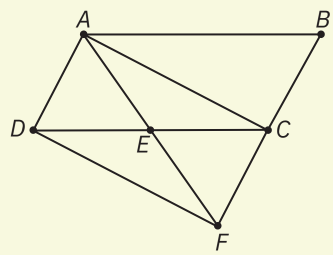


Figura 10

4. Punctul H este ortocentrul triunghiului ascuțitunghic ABC, iar punctele M, N, P, Q sunt mijloacele segmentelor AB, AH, CH, respectiv BC. Arătați că patrulaterul $MNPQ$ este dreptunghi.

Demonstrație:
Segmentul MQ este linie mijlocie în ΔABC, deci $MQ \parallel AC$ și $AC = 2 \cdot MQ$ (1). Segmentul NP este linie mijlocie în ΔAHC, deci $NP \parallel AC$ și $AC = 2 \cdot NP$ (2). Din relațiile (1) și (2) rezultă că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram (Figura 11). Cum H este ortocentrul triunghiului ABC, rezultă că BH este înălțime în ΔABC, deci $BH \perp AC$. Dar $NP \parallel AC$, deci $BH \perp NP$. De asemenea, avem $MN \parallel BH$, întrucât MN este linie mijlocie în triunghiul ABH. Ca urmare, $MN \perp NP$, deci $\sphericalangle MNP = 90°$, de unde rezultă că paralelogramul $MNPQ$ este dreptunghi.

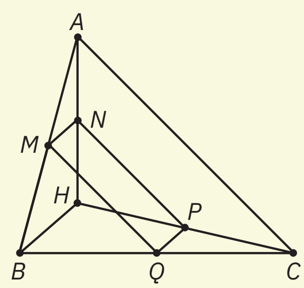


Figura 11

4.4

Probleme propuse

1. Se consideră dreptunghiul $MNPQ$ din Figura 12, $MP \cap NQ = \{A\}$. Precizați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:
   a. Diagonalele dreptunghiului sunt MP și NQ.
   b. Segmentele AM și AN sunt congruente.
   c. Lățimile dreptunghiului $MNPQ$ sunt NP și NA.
   d. $\sphericalangle MPQ + \sphericalangle PNQ = 90°$.
   e. NA este mediană în triunghiul MNP.
   f. Unghiurile $\sphericalangle PMQ$ și $\sphericalangle PNQ$ sunt congruente.

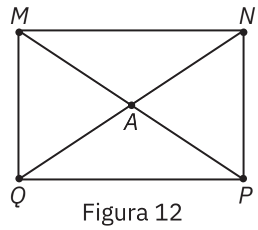


Figura 12

2. În dreptunghiul $ABCD$ avem $AC = 5$ cm. Calculați $2 \cdot AC + 3 \cdot BD$.
3. Dacă lungimea diagonalei AC a dreptunghiului $ABCD$ este egală cu 7 cm, atunci calculați lungimea segmentului OD, unde $AC \cap BD = \{O\}$.
4. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 10$ cm și $BC = 6$ cm. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$ intersectează latura CD în punctul M. Determinați lungimea segmentului DM.
5. În dreptunghiul $ABCD$, $\sphericalangle DOC = 120°$, $\{O\} = AC \cap BD$ și $BD = 8$ cm. Calculați perimetrul triunghiului BOC.
6. Se iau punctele M și N pe laturile AB și CD ale dreptunghiului $ABCD$ astfel încât $MB = DN$. Demonstrați că patrulaterul $AMCN$ este paralelogram.
7. În dreptunghiul $ABCD$, $\sphericalangle ACD = 30°$, iar punctul E este simetricul punctului C față de punctul B. Demonstrați că triunghiul ACE este echilateral.
8. În patrulaterul convex $ABCD$, diagonalele sunt perpendiculare și punctele M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor AB, BC, CD și respectiv DA. Demonstrați că patrulaterul $MNPQ$ este dreptunghi.
9. Arătați că picioarele perpendicularelor construite din vârfurile unui dreptunghi pe diagonalele sale sunt vârfurile unui dreptunghi.
10. Demonstrați că bisectoarele unghiurilor unui dreptunghi determină pe diagonalele dreptunghiului vârfurile unui dreptunghi.
11. În paralelogramul $ABCD$, punctele E și F sunt simetricele punctelor D, respectiv B față de dreapta AC. Demonstrați că patrulaterul $DEBF$ este dreptunghi.
12. În exteriorul dreptunghiului $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABM și BCP. Demonstrați că segmentele MD și AP sunt congruente.

Minitest

1. În dreptunghiul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$ și $\sphericalangle BDC = 40°$.
   Determinați măsurile unghiurilor $\sphericalangle ADB$, $\sphericalangle DOC$ și $\sphericalangle BAC$. **(3p)**
2. În exteriorul dreptunghiului $ABCD$ se construiesc triunghiurile dreptunghice isoscele ABM și BCT, $\sphericalangle M = \sphericalangle T = 90°$. Se știe că $AB = 10$ cm și $BC = 6$ cm.
   a. Demonstrați că punctele M, B și T sunt coliniare.
   b. Arătați că triunghiul MDC este isoscel.
   c. Calculați distanța de la punctul M la dreapta DC și distanța de la punctul T la dreapta AD. **(3p)**
3. Se consideră dreptunghiul $ABCD$. Dacă $\sphericalangle ADB = 60°$, $AH \perp BD$, $H \in BD$ și $DH = 8$ cm, atunci calculați lungimea diagonalei BD. **(3p)**

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Lecția 5: Rombul. Proprietăți

Cuvinte-cheie

romb bisectoare mediatoare perpendiculare consecutive congruente

Rombul

Mate practică

Fața de masă din imaginea alăturată este decorată cu motive tradiționale românești. Figurile geometrice reprezentate în ea sunt paralelograme particulare, în care oricare două laturi consecutive sunt congruente.

De reținut

Definiție. Paralelogramul cu două laturi consecutive congruente se numește romb.

În Figura 1 este reprezentat rombul *ABCD*.

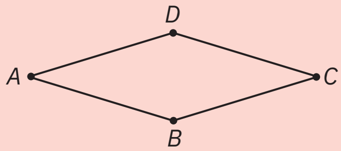


Figura 1

Știați că...?

Cuvântul *romb* provine din limba greacă, în care *rhombos* înseamnă „sfârlează”.

Proprietățile rombului

De reținut

Fiind un paralelogram, într-un romb:

- laturile opuse sunt paralele și congruente, două câte două;
- unghiurile opuse sunt congruente, două câte două, iar unghiurile consecutive sunt suplementare;
- diagonalele au același mijloc.

Fiind un paralelogram *particular*, rombul are și proprietăți specifice.

Teorema 1. Toate laturile rombului sunt congruente.

Ipoteză: $ABCD$ este romb.

Concluzie: $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$

Demonstrație:

Conform definiției, rombul are două laturi consecutive congruente; de exemplu, $AB \equiv BC$.

Fiind paralelogram, laturile opuse ale patrulaterului $ABCD$ sunt congruente două câte două, deci $AB \equiv CD$ și $BC \equiv DA$. Folosind tranzitivitatea relației de congruență, rezultă că $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$.

Reciproca teoremei 1. Dacă într-un patrulater convex toate laturile sunt congruente, atunci acesta este romb.

Ipoteză: $ABCD$ este patrulater convex.
$AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$

Concluzie: $ABCD$ este romb.

Demonstrație:

Deoarece $AB \equiv CD$ și $DA \equiv BC$, deducem că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram. Având două laturi consecutive congruente, de exemplu $AB \equiv BC$, rezultă că patrulaterul $ABCD$ este romb.

Teorema 2. Diagonalele rombului sunt perpendiculare.

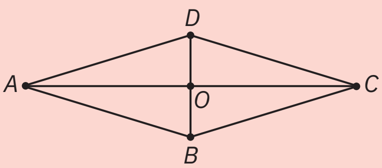


Figura 2

Ipoteză: $ABCD$ este romb.

Concluzie: $AC \perp BD$

Demonstrație:
Notăm $AC \cap BD = \{O\}$ (vezi Figura 2). Deoarece *ABCD* este romb, rezultă că $AB \equiv AD$, deci triunghiul *ABD* este isoscel de bază *BD*. Întrucât punctul *O* este mijlocul diagonalei *BD*, rezultă că *AO* este mediană în triunghiul isoscel *ABD*, deci este și înălțime. Ca urmare, $AO \perp BD$, adică $AC \perp BD$.

Reciproca teoremei 2. Dacă într-un paralelogram diagonalele sunt perpendiculare, atunci acesta este romb.
Ipoteză: *ABCD* este paralelogram.
$AC \perp BD$
Concluzie: *ABCD* este romb.

Demonstrație:
Notând $AC \cap BD = \{O\}$ și având în vedere că *ABCD* este paralelogram, rezultă că *O* este mijlocul diagonalei *BD*, deci *AO* este mediană în triunghiul *ABD* (1).
Din ipoteză, cum $AC \perp BD$, rezultă că $AO \perp BD$, deci *AO* este și înălțime în triunghiul *ABD* (2).
Din relațiile (1) și (2) rezultă că triunghiul *ABD* este isoscel de bază *BD* și atunci $AB \equiv AD$. Astfel, paralelogramul *ABCD* are două laturi consecutive congruente și, conform definiției, este romb.

Teorema 3. Într-un romb, diagonalele sunt bisectoarele unghiurilor sale.
Ipoteză: *ABCD* este romb.
Concluzie: $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DAC$, $\sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle DCA$
$\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBD$, $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CDB$

Demonstrație:
În triunghiurile *ABC* și *ADC* avem $AB \equiv AD$ și $BC \equiv DC$ (din proprietățile rombului), precum și $AC \equiv AC$ (ca latură comună). Ca urmare, $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$ (cazul L.L.L.), deci $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DAC$ și $\sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle DCA$.
Asemănător, se arată că $\Delta ABD \equiv \Delta CBD$ (cazul L.L.L.), de unde reiese că $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBD$ și $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CDB$.

Reciproca teoremei 3. Dacă într-un paralelogram o diagonală este bisectoarea unui unghi, atunci acesta este romb.

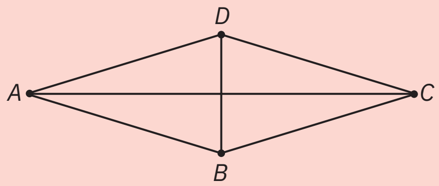


Figura 3

Ipoteză: *ABCD* este paralelogram.
AC este bisectoarea unghiului *BAD*.
Concluzie: *ABCD* este romb.

Demonstrație:
Din $AB \parallel CD$ rezultă că $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ACD$, ca unghiuri alterne interne. Similar, din $AD \parallel BC$ deducem că $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle ACB$.
Deoarece $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DAC$ (conform ipotezei), deducem că $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ACD$.
În triunghiurile *BAC* și *DAC* avem $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DAC$, $AC \equiv AC$ și $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ACD$. Ca urmare, $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$ (cazul U.L.U.), de unde rezultă că $AB \equiv AD$. Așadar, paralelogramul *ABCD* are două laturi consecutive congruente, deci este romb (Figura 3).

Mate practică

Dorim să acoperim o curte cu pavele de același fel, în formă de romb, ca în Figura 4. Pavelele se aranjează în seturi de câte trei, ca în Figura 5. Determinați măsura unghiului *BPD*.


Figura 4

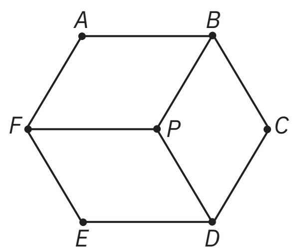


Figura 5

Indicație. Unghiurile congruente *BPF*, *BPD* și *DPF* sunt unghiuri în jurul punctului *P*.

Modalități uzuale de construcție a unui romb

1. Utilizând reciproca teoremei 2

Desenăm două segmente necongruente, care au același mijloc, iar măsura unghiului dintre cele două segmente să fie de 90°. Cele patru extremități ale celor două segmente sunt vârfurile rombului.

2. Utilizând un triunghi isoscel

Desenăm un triunghi isoscel, care nu este dreptunghic: vârfurile lui vor fi trei dintre vârfurile rombului. Construim simetricul vârfului opus bazei față de aceasta, obținând cel de-al patrulea vârf al rombului.

Observații

1. Un romb are două axe de simetrie, și anume diagonalele rombului.
2. Punctul de intersecție a diagonalelor rombului (adică intersecția axelor de simetrie) este centrul de simetrie al rombului.
   Așadar, privind rombul ca mulțimea punctelor aflate pe laturile sale, rezultă că:
   - simetricul unui punct al rombului față de oricare dintre diagonalele sale este tot un punct al rombului;
   - simetricul unui punct al rombului față de punctul de intersecție al diagonalelor aparține rombului.

De exemplu, în Figura 6, punctul E este situat pe latura AD a rombului $ABCD$. Simetricul punctului E față de dreapta AC (axă de simetrie a rombului) este punctul G, aflat pe latura AB, iar simetricul lui E față de centrul de simetrie O este punctul F, situat pe latura BC.

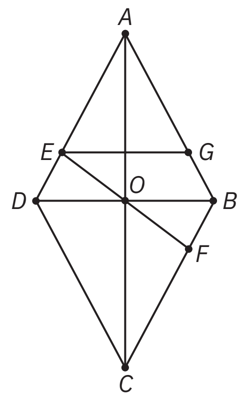


Figura 6

Activitate practică

Desenați pe o coală de hârtie un romb și notați-l $ABCD$. Construiți diagonalele și notați cu O punctul lor de intersecție. Decupați cele patru triunghiuri dreptunghice obținute, AOB, BOC, COD și DOA.

Construiți cu ajutorul celor patru triunghiuri un dreptunghi, respectiv un paralelogram.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Punctele A, B, D, C aparțin cercului $\mathcal{C}(O, r)$, în această ordine, astfel încât punctele A și D sunt diametral opuse, iar dreapta BC este mediatoarea razei OA. Arătați că patrulaterul $ABOC$ este romb.

   Demonstrație:
   Cum A și D sunt puncte diametral opuse, AD este diametru, deci centrul O al cercului aparține segmentului AD. Segmentele OB și OC sunt raze, deci $OB \equiv OC$ (Figura 7).
   Deoarece dreapta BC este mediatoarea razei OA, rezultă că $d(B, A) = d(B, O)$, adică $BA = BO$, respectiv $d(C, A) = d(C, O)$, adică $CA = CO$. În consecință, $AB \equiv OB \equiv OC \equiv CA$, deci patrulaterul $ABOC$ este romb.

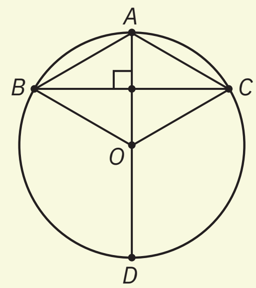


Figura 7

2. În dreptunghiul $ABCD$ se notează cu E, F, G și H mijloacele laturilor AB, BC, CD și respectiv DA.
   Arătați că patrulaterul $EFGH$ este romb.

   Demonstrație:
   Segmentul EH este linie mijlocie în triunghiul ABD, iar segmentul FG este linie mijlocie în triunghiul BCD (Figura 8). Ca urmare, $HE \parallel BD$ și $BD = 2 \cdot HE$, respectiv $FG \parallel BD$ și $BD = 2 \cdot FG$. Prin tranzitivitate, $HE \parallel FG$, respectiv $HE \equiv FG$, deci patrulaterul $EFGH$ este paralelogram.
   Segmentul EF este linie mijlocie în triunghiul ABC; prin urmare $AC = 2 \cdot EF$. Patrulaterul $ABCD$ este dreptunghi, deci $AC \equiv BD$. Cum $BD = 2 \cdot HE$ și $AC = 2 \cdot EF$, deducem că $EF \equiv HE$, deci $EFGH$ este romb.

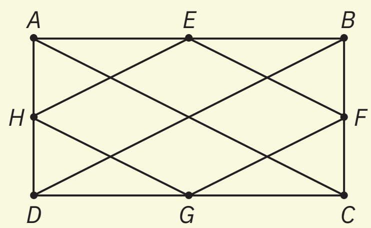


Figura 8

3. Unghiul A al rombului $ABCD$ are măsura de 60°. Din punctul D se construiește $DE \perp BC$, $E \in BC$, și se prelungește cu un segment EF congruent cu DE. Arătați că:
   a. patrulaterul $BFCD$ este romb;
   b. punctele A, B, F sunt coliniare.

Demonstrație:

a. Deoarece $BC \equiv CD$ și $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAD = 60°$, deducem că triunghiul BCD este echilateral (Figura 9). Din ipoteză, $DE \perp BC$, adică DE este înălțime și, în consecință, este și mediană în triunghiul echilateral BCD. Așadar, $BE \equiv EC$. Deoarece $EF \equiv DE$ și $BE \equiv EC$ rezultă că patrulaterul $BFCD$ este paralelogram și, ținând cont că $DF \perp BC$, deducem că acesta este romb.

b. Cum $BFCD$ este romb, avem $BF \parallel CD$. Întrucât $BA \parallel CD$ și B este punct exterior dreptei CD, din *axioma paralelelor* rezultă că dreptele BA și BF coincid și atunci punctele A, B, F sunt coliniare.

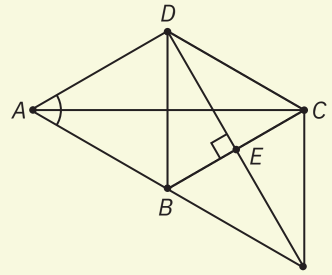


Figura 9

4. În triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $\sphericalangle C = 30°$, AD este înălțime, $D \in BC$. Dreapta EF este mediatoarea laturii BC, cu $F \in AC$ și $E \in BC$, iar $AD \cap BF = \{H\}$.

a. Arătați că semidreapta BF este bisectoarea unghiului ABE.

b. Demonstrați că patrulaterul $AHEF$ este romb.

Demonstrație:

a. Dreapta EF este mediatoarea laturii $BC \Rightarrow d(F, B) = d(F, C) \Rightarrow FB \equiv FC \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta FBC$ este isoscel de bază $BC \Rightarrow \sphericalangle FBC \equiv \sphericalangle C \Rightarrow \sphericalangle FBC = \sphericalangle C = 30°$ (Figura 10).

ΔABC este dreptunghic în A, cu $\sphericalangle C = 30°$, deci $\sphericalangle ABC = 60°$. Atunci $\sphericalangle ABF = 60° - 30° = 30° = \sphericalangle FBC$, adică semidreapta BF este bisectoarea unghiului ABE (1).

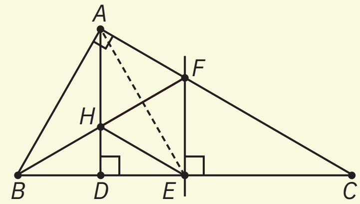


Figura 10

b. Deoarece ΔABC este dreptunghic în A, cu $\sphericalangle C = 30°$, rezultă că $BC = 2 \cdot AB$, iar pentru că EF este mediatoarea laturii BC, rezultă că punctul E este mijlocul laturii BC, ceea ce implică $BC = 2 \cdot BE$. Din relațiile $BC = 2 \cdot AB$ și $BC = 2 \cdot BE$, obținem $AB = BE$ și, în consecință, triunghiul ABE este isoscel. Având unghiul ABC cu măsura de $60°$, deducem că triunghiul ABE este echilateral. Deoarece semidreapta BF este bisectoare în triunghiul ABE echilateral, rezultă că BF este înălțime în acest triunghi și atunci $BF \perp AE$. În triunghiul ABC, AD este înălțime și deci $AD \perp BC$, echivalent cu $AD \perp BE$, ceea ce înseamnă că AD este înălțime și în triunghiul ABE. În ΔABE, AD și BF sunt înălțimi, $AD \cap BF = \{H\}$ și atunci punctul H este ortocentrul triunghiului ABE. Deci EH este a treia înălțime a triunghiului ABE și rezultă $EH \perp AB$.

Deoarece $EH \perp AB$ și $AC \perp AB$, obținem că $EH \parallel AF$. Dreapta EF este mediatoarea laturii BC, deci $EF \perp BC$. Din $EF \perp BC$ și $AD \perp BC$ rezultă că $EF \parallel AH$. În patrulaterul $AHEF$, $EH \parallel AF$, $EF \parallel AH$, de unde deducem că $AHEF$ este paralelogram și, ținând cont că $BF \perp AE$, rezultă că patrulaterul $AHEF$ este romb.

Probleme propuse

1. Dați exemple de romburi întâlnite în viața cotidiană (în drum spre școală, în clasă, în curtea școlii, acasă etc.).

2. Se consideră rombul $ABCD$ din Figura 11, $AC \cap BD = \{O\}$. Precizați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a. $\sphericalangle AOD = 90°$;

b. triunghiul ADC este isoscel;

c. dreapta BD nu este mediatoarea segmentului AC;

d. triunghiul AOD este echilateral;

e. punctul C se află pe mediatoarea segmentului BD;

f. $\sphericalangle DCO + \sphericalangle ABD > 90°$.

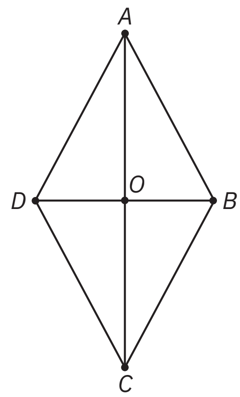


Figura 11

3. În rombul $ABCD$ avem $AC \cap BD = \{O\}$ și $\sphericalangle BAC = 40°$. Determinați măsurile unghiurilor BAD, ADC, DBC, DOC, ACB.

4. Lungimea laturii rombului $ABCD$ este egală cu 9 cm. Calculați lungimea diagonalei BD știind că $\sphericalangle ABC = 120°$.

5. Se consideră rombul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$ astfel încât distanța de la punctul O la dreapta AB este egală cu 7 cm. Calculați distanța de la punctul D la dreapta AB.

6. Se consideră triunghiul echilateral ABC din Figura 12. Punctele D, E și F sunt mijloacele laturilor AB, BC și AC.
   a. Arătați că patrulaterul $ADEF$ este romb.
   b. Identificați celelalte romburi din figura dată și justificați răspunsul.

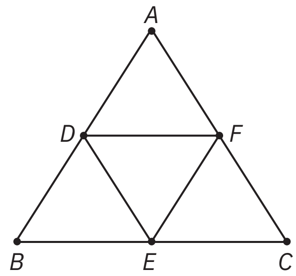


Figura 12

7. În rombul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$, $\sphericalangle BAC = 30°$ și $DO = 8$ cm.
   a. Calculați suma lungimilor laturilor rombului $ABCD$.
   b. Determinați distanța de la vârful D la dreapta AB.
8. Se consideră dreptunghiul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$. Fie punctul M simetricul punctului O față de dreapta AD. Demonstrați că:
   a. patrulaterul $AODM$ este romb;
   b. patrulaterul $ABOM$ este paralelogram.
9. Lungimea laturii unui romb este egală cu 6,25 cm. Perimetrul unui dreptunghi este de două ori mai mare decât suma lungimilor laturilor acestui romb.
   a. Arătați că perimetrul dreptunghiului este egal cu 50 cm.
   b. Determinați dimensiunile dreptunghiului, știind că lățimea este un sfert din lungime.
10. În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, punctul M este mijlocul segmentului BC. Paralela prin A la dreapta BC intersectează paralela prin B la dreapta AM în punctul N. Demonstrați că patrulaterul $AMBN$ este romb.
11. Pe laturile AD și DC ale unui romb $ABCD$ se construiesc, în exteriorul rombului, triunghiurile echilaterale ADF și CDE.
   a. Arătați că triunghiurile BDE și BDF sunt congruente.
   b. Demonstrați că triunghiul BEF este echilateral.
12. Știind că media aritmetică a lungimilor a trei laturi consecutive ale unui paralelogram este egală cu lungimea celei de-a patra laturi, demonstrați că paralelogramul este romb.
13. În rombul $ABCD$ se consideră punctele E, F, G și H mijloacele laturilor AB, BC, CD și DA. Demonstrați că patrulaterul $EFGH$ este dreptunghi.
14. Se consideră rombul $ABCD$ cu $\sphericalangle BAD = 60°$ și $AC = 12$ cm.
   a. Arătați că distanța de la punctul C la dreapta AB este egală cu 6 cm.
   b. Calculați distanța de la punctul A la dreapta BC.
15. Se consideră romburile $ABCD$ și $ABEF$ astfel încât unghiurile BAD și BAF sunt congruente, iar punctele D și E se află de o parte și de alta a dreptei AB. Demonstrați că dreptele AB și CE sunt perpendiculare.
16. Se consideră paralelogramul $ABCD$, $\sphericalangle A < 90°$ și punctele M și Q pe semidreptele CB, respectiv CD, astfel încât $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle MAB$, $\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle QAD$. Dacă $AQ = AM$, demonstrați că $CQ = CM$.

Minitest

1. În rombul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$ și $\sphericalangle BDC = 50°$. Determinați măsurile unghiurilor $\sphericalangle ADB$, $\sphericalangle DOC$ și $\sphericalangle BAC$. **(3p)**
2. În triunghiul ABC, bisectoarea unghiului A intersectează latura BC în punctul D. Fie $DE \parallel AC$, $E \in AB$ și $DF \parallel AB$, $F \in AC$. Demonstrați că $AEDF$ este romb. **(3p)**
3. Se consideră rombul $ABCD$ cu $\sphericalangle BAD = 30°$ și $AB = 18$ cm. Calculați distanța de la punctul A la dreapta BC. **(3p)**

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

4.6

Lecția 6: Pătratul. Proprietăți

Cuvinte-cheie

pătrat perpendiculare romb simetrie bisectoare dreptunghi

Pătratul

Mate practică

Priviți pictura abstractă din imaginea alăturată. Ce puteți spune despre lungimile laturilor patrulaterelor din tablou? Dar despre măsurile unghiurilor?

Comparați aceste patrulatere cu dreptunghiul, respectiv cu rombul.

De reținut

Definiție. Dreptunghiul care are două laturi consecutive congruente se numește *pătrat*.

Din definiție rezultă că pătratul este un paralelogram care are două laturi consecutive congruente și unghiurile drepte, deci este un caz particular de romb; mai precis, pătratul este rombul cu un unghi drept. Astfel, putem spune că patrulaterul convex care este și dreptunghi și romb este pătrat. Așadar (Figura 1):

1. dacă $ABCD$ este dreptunghi și $AB \equiv AD$, atunci $ABCD$ este pătrat;
2. dacă $ABCD$ este romb și $\sphericalangle A = 90°$, atunci $ABCD$ este pătrat.

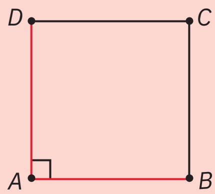


Figura 1

Știați că...?

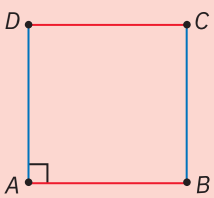
În terminologia matematică românească, denumirea de *pătrat* a fost introdusă în anul 1821 de către cărturarul român Gheorghe Lazăr, întemeietorul învățământului în limba română în Țara Românească.

Proprietățile pătratului

De reținut

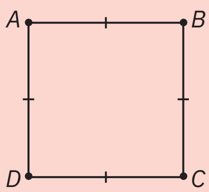
Fiind atât dreptunghi cât și romb (implicit și paralelogram), pătratul are toate proprietățile acestora:

P_1: Pătratul are laturile opuse paralele.



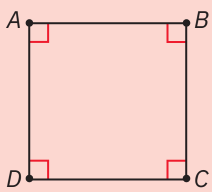
$ABCD$ pătrat $\Rightarrow AC \parallel BD$ și $AD \parallel BC$

P_2: Pătratul are toate laturile congruente.



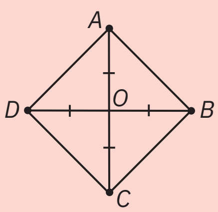
$ABCD$ este pătrat $\Rightarrow$
$\Rightarrow AB = BC = CD = DA$.

P_3: Pătratul are toate unghiurile drepte.



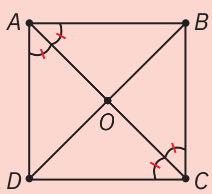
$ABCD$ este pătrat $\Rightarrow$
$\Rightarrow \sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90°$.

P_4: Diagonalele pătratului se înjumătățesc.



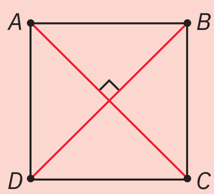
$ADCB$ este pătrat $\Rightarrow$
$\Rightarrow AO = BO = CO = DO$.

P_5: Diagonalele pătratului sunt bisectoarele unghiurilor pătratului.



$ABCD$ este pătrat $\Rightarrow \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DAC$,
$\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBD$.

P_6: Diagonalele pătratului sunt congruente și sunt perpendiculare.



$ABCD$ pătrat $\Rightarrow AC = BD$ și $AC \perp BD$.

Pentru a demonstra că un patrulater este pătrat, putem utiliza următoarele afirmații:

Teorema 1. Dacă un dreptunghi are diagonalele perpendiculare, atunci acesta este pătrat.

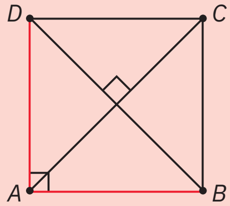


Figura 2

Ipoteză: *ABCD* este dreptunghi.
$AC \perp BD$

Concluzie: *ABCD* este pătrat.

Demonstrație:
Deoarece *ABCD* este dreptunghi, deducem că patrulaterul *ABCD* este paralelogram (Figura 2).
Patrulaterul *ABCD* este paralelogram, cu $AC \perp BD$, deci este romb; așadar $AB \equiv AD$.
Cum *ABCD* este dreptunghi, cu $AB \equiv AD$, conform definiției, rezultă că *ABCD* este pătrat.

Teorema 2. Dacă într-un dreptunghi o diagonală este bisectoarea unui unghi, atunci acesta este pătrat.

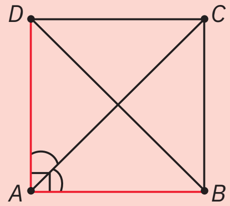


Figura 3

Ipoteză: *ABCD* este dreptunghi.
AC este bisectoarea unghiului *BAD*.

Concluzie: *ABCD* este pătrat.

Demonstrație:
Fiind dreptunghi, patrulaterul *ABCD* este și paralelogram (Figura 3). Deoarece semidreapta *AC* este bisectoarea unghiului *BAD*, rezultă că *ABCD* este romb, deci $AB \equiv AD$.
În dreptunghiul *ABCD* avem $AB \equiv AD$ deci, conform definiției, *ABCD* este pătrat.

Teorema 3. Dacă un romb are diagonalele congruente, atunci acesta este pătrat.

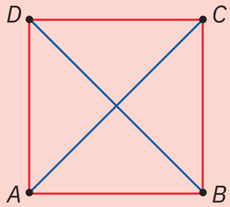


Figura 4

Ipoteză: *ABCD* este romb.
$AC \equiv BD$

Concluzie: *ABCD* este pătrat.

Demonstrație:
Fiind romb, patrulaterul *ABCD* este paralelogram și $AB \equiv AD$ (Figura 4).
Patrulaterul *ABCD* este paralelogram, cu $AC \equiv BD$, și atunci este dreptunghi.
Deci *ABCD* este dreptunghi, cu $AB \equiv AD$, și în consecință rezultă că *ABCD* este pătrat.

Centrul de simetrie. Axele de simetrie ale pătratului

Situație-problemă

Fie *ABCD* pătrat, cu $AC \cap BD = \{O\}$.

Fiind un paralelogram particular, pătratul admite ca centru de simetrie punctul de intersecție al diagonalelor, adică punctul *O*.

Pătratul admite patru axe de simetrie: mediatoarele laturilor sale și dreptele ce includ diagonalele. Astfel, pentru pătratul *ABCD* din Figura 5:

- mediatoarele laturilor sale (dreptele *EF* și *GH*) sunt axe de simetrie;
- dreptele *AC* și *BD*, ce includ diagonalele sale, sunt axe de simetrie.

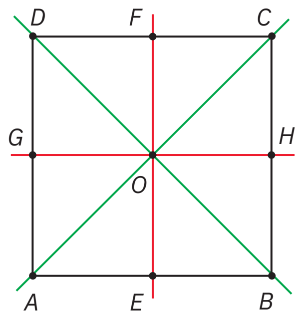


Figura 5

4.6

Modalități uzuale pentru construcția unui pătrat

1. Utilizând teorema 1

Desenăm două segmente congruente, care au același mijloc, astfel încât măsura unghiului dintre cele două segmente să fie de 90°.

Cele patru extremități ale celor două segmente sunt vârfurile pătratului.

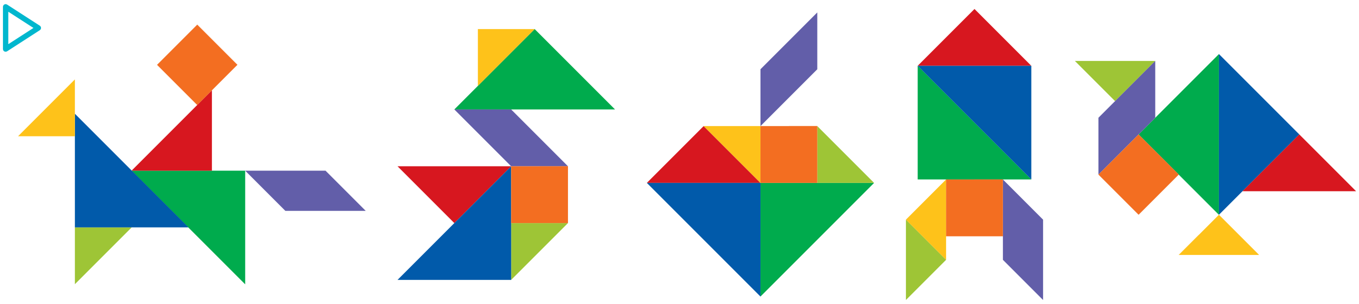
2. Utilizând un triunghi dreptunghic isoscel

Desenăm un triunghi dreptunghic isoscel: vârfurile lui vor fi trei dintre vârfurile pătratului. Construim simetricul vârfului opus bazei triunghiului isoscel față de aceasta, obținând cel de-al patrulea vârf al pătratului.

Joc

Tangramul este un foarte vechi joc de puzzle, cunoscut sub denumiri ca „pătratul magic” sau „placheta celor șapte șiretlicuri”. Jucătorul utilizează șapte piese: cinci triunghiuri dreptunghice isoscele, un pătrat și un paralelogram, pentru a crea sute de figuri. În realizarea figurilor, piesele trebuie să se atingă fără a se suprapune.

Realizați propriul vostrul tangram din carton sau hârtie și încercați să obțineți figuri precum cele de mai jos.



Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Punctul I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, dreptunghic în A, iar $ID \perp AC$, $IE \perp AB$, cu $D \in AC$ și $E \in AB$.
Arătați că patrulaterul $ADIE$ este pătrat.

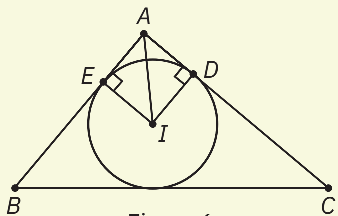


Figura 6

Demonstrație:
Deoarece punctul I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, rezultă că semidreapta AI este bisectoarea unghiului BAC (Figura 6) (1).
Triunghiul ABC este dreptunghic în A, $ID \perp AC$, $IE \perp AB$, deci $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ADI = \sphericalangle AEI = 90°$ și atunci patrulaterul $ADIE$ este dreptunghi (2).
Din relațiile (1) și (2) rezultă că patrulaterul $ADIE$ este pătrat.

2. Pe laturile AB, BC, CD și DA ale pătratului $ABCD$ se consideră punctele E, F, G, respectiv H, astfel încât $AE = BF = CG = DH$. Arătați că dreptele EG și FH sunt perpendiculare.

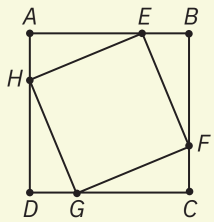


Figura 7

Demonstrație:
Patrulaterul $ABCD$ este pătrat, deci $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90°$ (1) și $AD = AB = BC = CD$ (2) (Figura 7).
Din ipoteză, $AE = BF = CG = DH$ (3). Din relațiile (2) și (3) rezultă că $AD - DH = AB - AE = BC - BF = CD - CG \Leftrightarrow AH = BE = CF = DG$ (4).
Din relația (1) rezultă că triunghiurile AEH, BFE, CGF și DHG sunt dreptunghice în A, B, C, respectiv D (5).
Din relațiile (3), (4) și (5), rezultă $\Delta AEH \equiv \Delta BFE \equiv \Delta CGF \equiv \Delta DHG$ (C.C.). Deci $HE \equiv EF \equiv FG \equiv GH$ și atunci patrulaterul $EFGH$ este romb, ceea ce implică $EG \perp HF$.

3. În cercul $\mathcal{C}(O, r)$, AC și BD sunt diametre perpendiculare.
Arătați că patrulaterul $ABCD$ este pătrat.

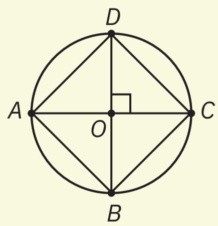


Figura 8

Demonstrație:
Deoarece AC și BD sunt diametre în cercul $\mathcal{C}(O, r)$, deducem că $AC \cap BD = \{O\}$ și $AC \equiv BD$ (Figura 8). De asemenea, rezultă că punctul O este mijlocul segmentelor AC și BD, deci patrulaterul $ABCD$ este paralelogram. Ținând cont că în acest paralelogram $AC \equiv BD$, deducem că $ABCD$ este dreptunghi. Deoarece dreptunghiul $ABCD$ are diagonalele AC și BD perpendiculare, rezultă că $ABCD$ este pătrat.

4. Se consideră pătratul $ABCD$ și triunghiul echilateral ABM.

a. Dacă punctul M este în interiorul pătratului $ABCD$, atunci calculați măsura unghiului MCD.

b. Dacă punctul M este în exteriorul pătratului $ABCD$, atunci calculați măsura unghiului MCD.

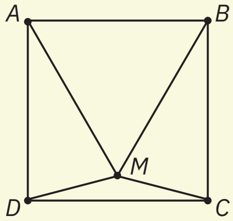


Figura 9

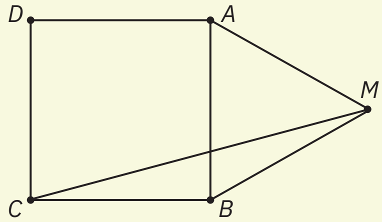


Figura 10

Demonstrație:

ΔABM este echilateral $\Rightarrow AB \equiv AM \equiv BM$ (1) și $\sphericalangle ABM = 60°$ (2).

Deoarece $ABCD$ este pătrat rezultă că $AB \equiv BC$ (3) și $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = 90°$ (4). Din relațiile (1) și (3) rezultă că $BM \equiv BC$ și, în consecință, triunghiul BMC este isoscel de bază MC (5).

a. Utilizăm figura 9.

Din relațiile (2) și (4) rezultă că $\sphericalangle CBM = 30°$ (6).

Din relațiile (5) și (6) rezultă că $\sphericalangle BCM = \sphericalangle BMC = \dfrac{180° - \sphericalangle CBM}{2} = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$.

Atunci $\sphericalangle MCD = \sphericalangle BCD - \sphericalangle BCM = 90° - 75° = 15°$.

b. Utilizăm Figura 10. Din relațiile (2) și (4) rezultă că $\sphericalangle CBM = 150°$ (7). Din relațiile (5) și (7) rezultă că $\sphericalangle BCM = \sphericalangle BMC = \dfrac{180° - \sphericalangle CBM}{2} = \dfrac{180° - 150°}{2} = 15°$. Atunci $\sphericalangle MCD = \sphericalangle BCD - \sphericalangle BCM = 90° - 15° = 75°$.

5. În exteriorul pătratului $ABCD$, cu $AC \cap BD = \{O\}$, se consideră un punct E, astfel încât punctele A, C, E sunt coliniare, în această ordine, și $\sphericalangle BED = 60°$. Arătați că triunghiul BED este echilateral.

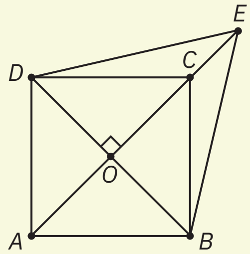


Figura 11

Demonstrație:

Deoarece $ABCD$ este pătrat, cu $AC \cap BD = \{O\}$, rezultă că $CA \perp BD$ și punctul O este mijlocul diagonalei BD (Figura 11). Atunci dreapta AC este mediatoarea segmentului BD și, cum $E \in AC$, rezultă că $d(E, B) = d(E, D) \Leftrightarrow EB = ED \Leftrightarrow EB \equiv ED \Rightarrow \Delta BED$ este isoscel.

Deoarece triunghiul BED este isoscel, cu $\sphericalangle BED = 60°$, deducem că triunghiul BED este echilateral.

Probleme propuse

1. Precizați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a. Dacă $ABCD$ este romb și $AC = BD$, atunci $ABCD$ este pătrat.

b. Dacă $ABCD$ este romb și $\sphericalangle DAC = 45°$, atunci $ABCD$ este pătrat.

c. În pătratul $ABCD$, $\sphericalangle ABD + \sphericalangle DCA = 90°$.

d. Dacă E aparține laturii AD a pătratului $ABCD$, atunci simetricul lui E față de AC se află pe segmentul BC.

e. Dacă E aparține laturii AD a pătratului $ABCD$, atunci simetricul lui E față de BD se află pe segmentul DC.

f. Dacă $ABCD$ este pătrat, $AC \cap BD = \{O\}$ și $AO = 2$ cm, atunci $AC + BD = 8$ cm.

g. Un dreptunghi $MNPQ$ cu $\sphericalangle PMN = 45°$ este pătrat.

2 În dreptunghiul $ABCD$, cu $AB = 2 \cdot BC$, se consideră punctele M și P mijloacele laturilor AB și DC.

a. Demonstrați că patrulaterele $AMPD$ și $BCPM$ sunt pătrate.

b. Calculați măsura $\sphericalangle ABP$.

c. Dacă $AP \cap MD = \{O_1\}$, $MC \cap BP = \{O_2\}$ și $O_1O_2 = 9$ cm, atunci calculați perimetrul dreptunghiului $ABCD$.

3. Se consideră pătratul $ABCD$ și punctele M și P mijloacele laturilor AB și AD. Demonstrați că patrulaterul $AMOP$ este pătrat, unde $AC \cap BD = \{O\}$.

4. Se consideră pătratul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$. Fie punctul P mijlocul segmentului AO și punctul S mijlocul laturii AD. Dacă $OS \cap DP = \{M\}$ și $AB = 12$ cm, atunci calculați lungimea segmentului OM.

5. Se consideră O_1, O_2, O_3 centrele pătratelor construite în exteriorul triunghiului echilateral ABC, pe laturile BC, AC și respectiv AB.

   a. Arătați că triunghiul $O_1O_2O_3$ este echilateral, cu laturile respectiv paralele cu cele ale triunghiului ABC.

   b. Determinați măsura unghiului dintre dreptele AO_3 și CO_1.

6. a. În Figura 12, patrulaterul $ABMP$ este pătrat. În interiorul pătratului se iau punctele C și D astfel încât $AB \parallel DC$, $AD = BC$ și $\sphericalangle ADC = 135°$. Demonstrați că punctele A, D, M sunt coliniare.

   b. Demonstrați că $DP = CM$.

   c. Dacă punctul de intersecție al dreptelor DP și CM aparține dreptei AB, calculați $\frac{DA}{DM}$.

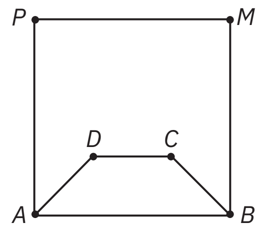


Figura 12

7. În exteriorul pătratului $ABCD$ se construiesc pătratele $BCMP$ și $DCSQ$. Demonstrați că punctele P, C, Q sunt coliniare și patrulaterul $BMSD$ este pătrat.

8. Se consideră pătratul $ABCD$ de latură 6 cm și punctele M, N, P și Q pe laturile AB, BC, CD, respectiv DA astfel încât $AM = BN = CP = DQ = 4$ cm.

   a. Arătați că $MNPQ$ este romb.

   b. Demonstrați că dreptele MP, BD și NQ sunt concurente.

9. În pătratul $ABCD$, considerăm punctul P pe diagonala BD, astfel încât $DP < PB$. Perpendiculara în P pe dreapta BD intersectează dreapta DC în Q și dreapta BC în R. Demonstrați că $BQ \perp DR$.

10. În exteriorul triunghiului ABC se contruiesc pătratele $ACMP$ și $ABRT$. Demonstrați că segmentele TC și BP sunt congruente.

Minitest

1. Se consideră pătratul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$ și $BO + DC = 11$ cm. Calculați suma $AB + BC + CD + DA + AC + BD$. **(3p)**

2. În exteriorul pătratului $ABCD$ se construiesc dreptunghiurile $ABMP$ și $BCSQ$, astfel încât $AP = CS$. Demonstrați că dreptele MQ și AC sunt paralele. **(3p)**

3. Cu ajutorul a cinci pătrate cu latura de 4 cm se construiește un dreptunghi $ABCD$. Calculați perimetrul dreptunghiului $ABCD$. **(3p)**

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Lecția 7: Trapezul: clasificare, proprietăți. Linia mijlocie în trapez

Cuvinte-cheie

trapez | neparalele | isoscel | linie mijlocie | semisumă | semidiferență

Trapezul

Mate practică

La circ, pe lângă jonglerii și momente amuzante, există numeroase acrobații spectaculoase. Unii dintre acrobați evoluează la un aparat format din două laturi paralele și două laturi neparalele, numit trapez.

De reținut

Definiție. Patrulaterul care are două laturi paralele și celelalte două neparalele se numește trapez.

Laturile paralele ale unui trapez sunt laturi opuse, au lungimi diferite și se numesc *baze*.

În Figura 1, laturile paralele ale trapezului $ABCD$ sunt AB și CD, iar laturile neparalele sunt AD și BC.

Deoarece $AB > CD$, vom spune că AB este *baza mare*, iar CD este *baza mică*.

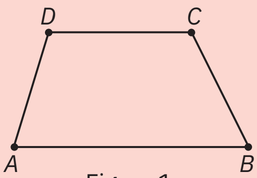


Figura 1

Știați că...?

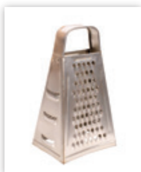
Cuvântul *trapez* provine din cuvântul în limba greacă *trapezion*. Denumirea de trapez a fost folosită pentru prima dată în secolul IV î.e.n.

Exemple

1. Identificați trapezele din imaginile de mai jos:

Acoperișul unei case

Răzătoare pentru legume



Poșetă

2. În Figura 2, punctele M, D și P sunt mijloacele laturilor AB, BC și AC în triunghiul ABC, deci segmentele MD, DP și PM sunt liniile mijlocii ale triunghiului ABC.
Din proprietatea liniei mijlocii, avem $MD \parallel AC$, $DP \parallel AB$, $MP \parallel BC$.
În patrulaterul $MBCP$, avem $MP \parallel BC$ și $BM \nparallel CP$ (deoarece BM și CP sunt concurente în A), deci $BCPM$ este trapez. Analog deducem că $ABDP$ și $ACDM$ sunt trapeze.

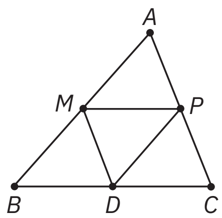
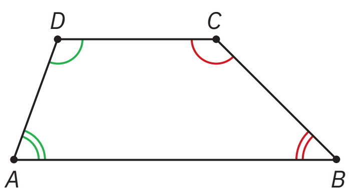


Figura 2

Proprietățile trapezului

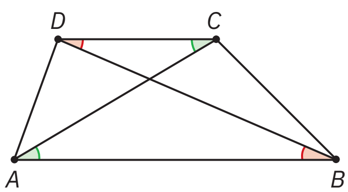
Teorema 1. Într-un trapez, unghiurile alăturate uneia dintre laturile neparalele sunt suplementare.



Ipoteză:
$ABCD$ trapez, $AB \parallel CD$

Concluzie:
$\sphericalangle BAD + \sphericalangle ADC = 180°$
$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = 180°$

Teorema 2. Într-un trapez, fiecare diagonală formează perechi de unghiuri congruente cu bazele trapezului.



Ipoteză:
$ABCD$ trapez, $AB \parallel CD$

Concluzie:
$\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ACD$
$\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle BDC$

4.7

Clasificarea trapezelor

În funcție de anumite caracteristici ale laturilor neparalele, distingem două tipuri particulare de trapez.

De reținut

Definiție. Trapezul în care una dintre laturile neparalele este perpendiculară pe baze se numește *trapez dreptunghic*.

În Figura 3, $ABCD$ este un trapez dreptunghic, cu $AB \parallel CD$ și $AD \perp AB$, $AD \perp DC$.

Întrucât bazele sunt paralele, este suficient ca una dintre laturile neparalele să fie perpendiculară pe una dintre baze pentru ca trapezul să fie dreptunghic.

Cu alte cuvinte, *un trapez care are un unghi drept este trapez dreptunghic*.

Într-adevăr, dacă în trapezul $ABCD$ avem $AB \parallel CD$ și $\sphericalangle A = 90°$, cum $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180°$, rezultă că $\sphericalangle D = 90°$, adică $AD \perp AB$ și $AD \perp DC$.

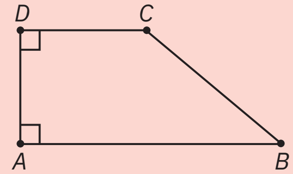


Figura 3

Definiție. Trapezul cu laturile neparalele congruente se numește *trapez isoscel*.

În Figura 4, trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$ și $AD \equiv BC$, este un trapez isoscel.

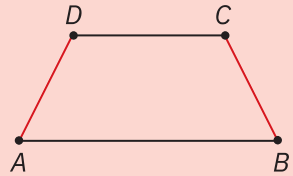


Figura 4

Proprietățile trapezului isoscel

De reținut

Teorema 3. Într-un trapez isoscel, unghiurile alăturate unei baze sunt congruente.

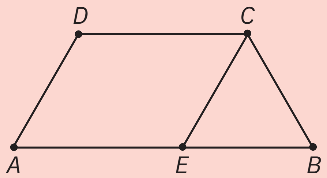


Figura 5

Ipoteză: $ABCD$ trapez, $AB \parallel CD$
$AD \equiv BC$

Concluzie: $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle ABC$
$\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle BCD$

Demonstrație:
Presupunem că $AB > CD$ (cazul $AB < CD$ este analog). Construim $CE \parallel AD$, cu $E \in AB$ (Figura 5). Deoarece $AE \parallel CD$ și $CE \parallel AD$, patrulaterul $AECD$ este paralelogram, deci $AD \equiv EC$. Cum $AD \equiv BC$, rezultă că $BC \equiv CE$, deci triunghiul CBE este isoscel de bază BE. În consecință, $\sphericalangle CEB \equiv \sphericalangle ABC$ și, cum $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CEB$ (ca unghiuri corespondente formate de dreptele paralele AD și CE cu secanta AB), rezultă că $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle ABC$. Deoarece unghiurile alăturate unei laturi neparalele sunt suplementare, obținem $\sphericalangle ADC = 180° - \sphericalangle DAB = 180° - \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$.

Reciproca teoremei 3. Dacă într-un trapez unghiurile alăturate unei baze sunt congruente, atunci trapezul este isoscel.

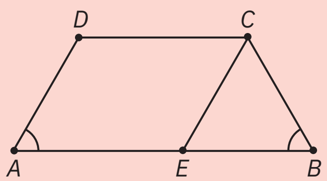


Figura 6

Ipoteză: $ABCD$ trapez, $AB \parallel CD$
$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$

Concluzie: $AD \equiv BC$

Demonstrație:
Presupunem că $AB > CD$ (cazul $AB < CD$ este analog). Construim $CE \parallel AD$, cu $E \in AB$ (Figura 6).
Deoarece $AE \parallel CD$ și $CE \parallel AD$, patrulaterul $AECD$ este paralelogram, deci $AD \equiv CE$.
Cum $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle ABC$ (din ipoteză) și $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CEB$ (unghiuri corespondente), rezultă că $\sphericalangle CEB \equiv \sphericalangle ABC$. Ca urmare, triunghiul CBE este isoscel de bază BE, deci $CB \equiv CE$ și, cum $CE \equiv AD$, rezultă că $AD \equiv BC$.

Teorema 4. Într-un trapez isoscel, diagonalele sunt congruente.

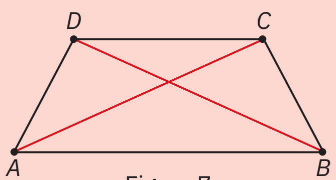


Figura 7

Ipoteză: $ABCD$ trapez, $AB \parallel CD$
$AD \equiv BC$

Concluzie: $AC \equiv BD$

Demonstrație:
Comparăm triunghiurile ABD și BAC (Figura 7). Avem $AD \equiv BC$ (din ipoteză), $AB \equiv BA$ (latură comună) și $\sphericalangle CBA \equiv \sphericalangle DAB$ (deoarece, conform teoremei 3, unghiurile alăturate unei baze a unui trapez isoscel sunt congruente). Ca urmare, $\Delta ABD \equiv \Delta BAC$ (cazul L.U.L.), deci $AC \equiv BD$.

Reciproca teoremei 4. Dacă într-un trapez diagonalele sunt congruente, atunci trapezul este isoscel.

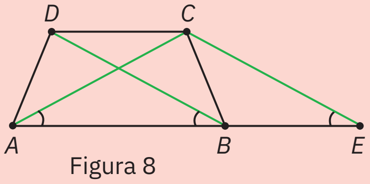


Figura 8

Ipoteză: $ABCD$ trapez
$AB \parallel CD$, $AC \equiv BD$

Concluzie: $AD \equiv BC$

Demonstrație:
Fie $CE \parallel BD$, cu $E \in AB$. Întrucât $BE \parallel CD$ și $CE \parallel BD$, patrulaterul $BECD$ este paralelogram, deci $BD \equiv EC$ (Figura 8). Cum $AC \equiv BD$, rezultă $CA \equiv CE$, adică triunghiul CAE este isoscel de bază AE, deci $\sphericalangle EAC \equiv \sphericalangle CEA$.
Dar $\sphericalangle CEA \equiv \sphericalangle DBA$ (ca unghiuri corespondente), deci $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle DBA$. Deoarece $CA \equiv BD$ (din ipoteză), $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle DBA$ și $AB \equiv BA$, deducem că $\Delta CAB \equiv \Delta DBA$ (cazul L.U.L.), de unde rezultă că $AD \equiv BC$.

Aplicație. Dacă $ABCD$ este un trapez isoscel, iar O este punctul de intersecție a diagonalelor trapezului, atunci triunghiurile OAB și OCD sunt isoscele.

Demonstrație
În triunghiurile ABC și BAD avem $AB \equiv BA$, $BC \equiv AD$ și $AC \equiv BD$, deci $\Delta ABC \equiv \Delta BAD$ (Figura 9). Ca urmare, $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle DBA$, adică $\sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle OBA$, de unde rezultă că triunghiul OAB este isoscel. Întrucât $\sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle OCD$ și $\sphericalangle OBA \equiv \sphericalangle ODC$ (unghiuri alterne interne), obținem și $\sphericalangle OCD \equiv \sphericalangle ODC$, deci și triunghiul OCD este isoscel.

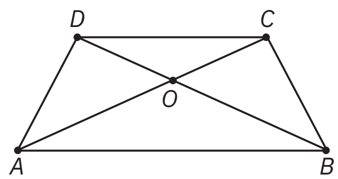


Figura 9

Axa de simetrie a unui trapez isoscel

Fie $ABCD$ un trapez isoscel, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și $\{O\} = AC \cap BD$. Notăm cu E și F mijloacele bazelor AB, respectiv CD (Figura 10).
Deoarece triunghiurile OAB și OCD sunt isoscele, dreapta OE este mediatoarea segmentului AB, iar dreapta OF este mediatoarea segmentului CD. Din $OE \perp AB$, $OF \perp CD$ și $AB \parallel CD$, deducem că punctele E, O și F sunt coliniare.
Așadar, *dreapta EF, care unește mijloacele bazelor unui trapez isoscel, este mediatoarea comună a bazelor trapezului.*
Dreapta EF este *axa de simetrie a trapezului isoscel ABCD*.

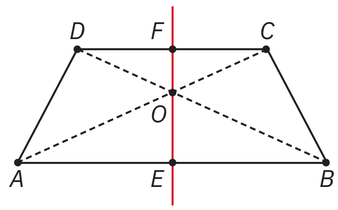


Figura 10

Construcția unui trapez isoscel

Construim un segment AB, de lungime $2a$, $a > 0$, și mediatoarea sa, d. Într-unul din cele două semiplane determinate de AB luăm un punct oarecare C, astfel încât distanța de la punctul C la dreapta d să fie mai mică decât a, și construim simetricul lui C față de dreapta d, pe care îl notăm cu D. Patrulaterul determinat de punctele A, B, C și D este trapez isoscel cu baza mare AB și baza mică CD.

Linia mijlocie în trapez

De reținut

Definiție. Segmentul care are ca extremități mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez se numește *linia mijlocie* a trapezului.

În Figura 11:

$$\left.\begin{array}{l} ABCD \text{ este trapez, cu } AB \parallel CD \\ E \text{ este mijlocul laturii } AD \\ F \text{ este mijlocul laturii } BC \end{array}\right\} \Leftrightarrow EF \text{ este linia mijlocie a trapezului.}$$

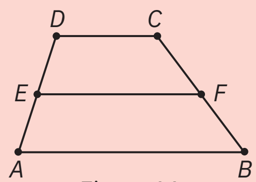


Figura 11

4.7

De reținut

Teorema 5. Linia mijlocie a trapezului este paralelă cu bazele și are lungimea egală cu jumătate din suma lungimilor bazelor.

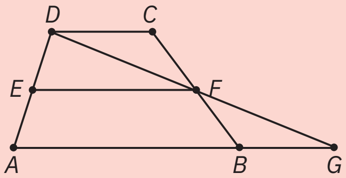


Figura 12

Ipoteză: $ABCD$ trapez, $AB \parallel CD$
E este mijlocul laturii AD.
F este mijlocul laturii BC.

Concluzie: $EF \parallel AB \parallel CD$ și $EF = \dfrac{AB+CD}{2}$

Demonstrație:
Fie $DF \cap AB = \{G\}$ (Figura 12). Deoarece $\sphericalangle DFC \equiv \sphericalangle GFB$ (unghiuri opuse la vârf), $CF \equiv BF$ și $\sphericalangle DCF \equiv \sphericalangle GBF$ (unghiuri alterne interne), rezultă că $\Delta DCF \equiv \Delta GBF$ (cazul U.L.U.), deci $DF \equiv GF$ și $DC \equiv BG$.
Deducem că F este mijlocul segmentului DG, deci EF este linie mijlocie în triunghiul DAG. În consecință, $EF \parallel AG$ și $EF = \dfrac{AG}{2}$, de unde rezultă că $EF \parallel DC \parallel AB$ și $EF = \dfrac{AG}{2} = \dfrac{AB+BG}{2} = \dfrac{AB+CD}{2}$.

Observații

1. Teorema 5 arată că lungimea liniei mijlocii a unui trapez este egală cu media aritmetică a lungimilor bazelor.
2. Au loc următoarele afirmații (reciproce ale teoremei 5):
   a. Dacă într-un trapez $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, punctul E este mijlocul laturii AD, iar punctul F aparține laturii BC, astfel încât $EF \parallel AB$, atunci punctul F este mijlocul laturii BC.
   b. Dacă într-un trapez $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, punctele E și F aparțin laturilor AD, respectiv BC, astfel încât $EF \parallel AB$ și $EF = \dfrac{AB+CD}{2}$, atunci EF este linie mijlocie în trapezul $ABCD$.

Știați că...?

Francezul Jules Léotard a introdus trapezul în acrobațiile prezentate la circ la mijlocul secolului al XIX-lea. Trapezul a apărut într-un număr de acrobație în cadrul circului Franconi din Paris, apoi, în 1861, la teatrul Alhambra din Londra.

Portofoliu

Hartă conceptuală

1. Definește **trei** noțiuni cuprinse în această hartă.
2. Enumeră **două** idei despre care ai dori să înveți în continuare.
3. Notează **o** abilitate pe care consideri că ai dobândit-o în aceste lecții.

Desenați pe o coală A4 harta din Figura 13 și adăugați-o în portofoliul personal *Geometria patrulaterului*.

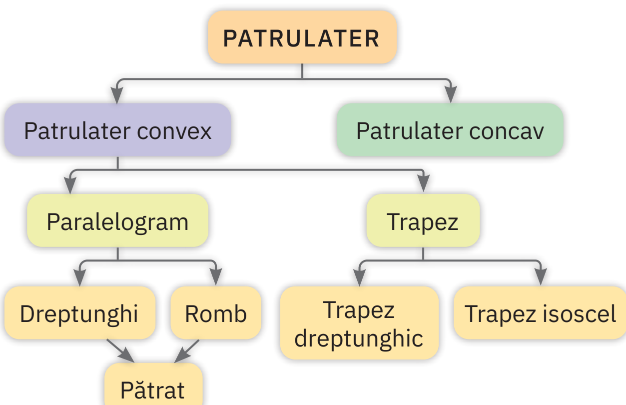


Figura 13

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Triunghiul VAB este isoscel de bază AB, iar punctele C și D aparțin laturilor VB, respectiv VA, astfel încât $CD \parallel AB$. Arătați că $AC \equiv BD$.

Rezolvare:
Deoarece AD și BC nu sunt paralele (fiind concurente în V), din $CD \parallel AB$ și $AD \nparallel BC$, rezultă că $ABCD$ este trapez (Figura 14). Cum $\sphericalangle VAB \equiv \sphericalangle VBA$, rezultă că $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$, deci $ABCD$ este trapez isoscel și atunci $AC \equiv BD$.

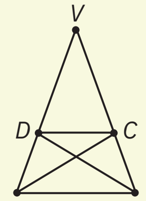


Figura 14

2. În trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, se consideră perpendicularele $DE \perp AB$ și $CF \perp AB$, unde $E, F \in AB$. Arătați că $AE = BF = \dfrac{AB - CD}{2}$.

Rezolvare:
Deoarece $DE \perp AB$, $CF \perp AB$, rezultă că $DE \parallel CF$ și cum $EF \parallel CD$, deducem că patrulaterul $CDEF$ este paralelogram, deci $EF \equiv CD$ (Figura 15).
Cum $\sphericalangle AED = \sphericalangle BFC = 90°$, $AD \equiv BC$ și $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$, triunghiurile AED și BFC sunt congruente (cazul I.U.), deci $AE \equiv BF$, de unde rezultă că $AE = BF = \dfrac{AB - EF}{2} = \dfrac{AB - CD}{2}$.

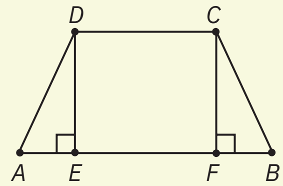


Figura 15

3. Arătați că în orice trapez au loc următoarele proprietăți:
a. mijloacele diagonalelor trapezului se află pe linia mijlocie a trapezului;
b. lungimea segmentului determinat de intersecțiile diagonalelor trapezului cu linia sa mijlocie este egală cu semidiferența lungimilor bazelor trapezului.

Rezolvare:
Fie $ABCD$ un trapez, cu $AB \parallel CD$ și $AB > CD$. Notăm cu E și F mijloacele laturilor neparalele AD, respectiv BC, și cu M, N mijloacele diagonalelor AC, respectiv BD (Figura 16). Segmentele EM și FN sunt linii mijlocii în triunghiurile ADC, respectiv BCD, deci $EM \parallel DC$ și $EM = \dfrac{CD}{2}$, respectiv $FN \parallel DC$ și $FN = \dfrac{CD}{2}$.

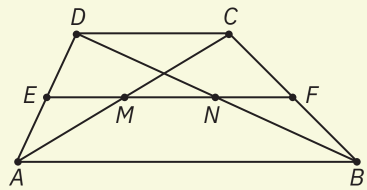


Figura 16

a. Cum EF este linie mijlocie a trapezului $ABCD$, rezultă că $EF \parallel CD$. Cum $EM \parallel DC$ și $FN \parallel DC$, aplicând axioma paralelelor rezultă că $M, N \in EF$, adică M și N se află pe linia mijlocie a trapezului.

b. Deoarece $EF = \dfrac{AB + CD}{2}$, avem $MN = EF - EM - FN = \dfrac{AB + CD}{2} - \dfrac{CD}{2} - \dfrac{CD}{2} = \dfrac{AB - CD}{2}$.

4. În triunghiul ascuțitunghic ABC, cu $AB < AC$, punctele M, P, Q sunt mijloacele laturilor AB, AC, respectiv BC, iar AD, $D \in BC$, este înălțime. Arătați că patrulaterul $MPQD$ este trapez isoscel.

Rezolvare:
Vom arăta mai întâi că $MPQD$ este trapez. Segmentul MP este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci $MP \parallel BC$, adică $MP \parallel DQ$ (Figura 17). Cum dreptele AB și MD sunt secante, iar $PQ \parallel AB$ (ca linie mijlocie în triunghiul ABC), rezultă că dreptele MD și PQ nu sunt paralele. Așadar, $MP \parallel DQ$ și $MD \nparallel PQ$, deci $MPQD$ este trapez.
Deoarece MD este mediană în triunghiul dreptunghic ADB, deducem că $DM = \dfrac{AB}{2}$. Dar $PQ = \dfrac{AB}{2}$ (din proprietatea liniei mijlocii), deci $DM = PQ$, adică trapezul $MPQD$ este isoscel.

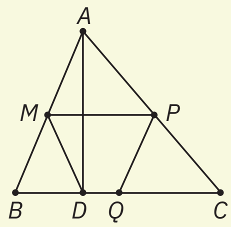


Figura 17

5. Fie $ABCD$ un paralelogram în care $AD > AB$. Notăm cu E simetricul punctului D față de dreapta AC. Arătați că:
a. $AB \equiv CE$; **b.** patrulaterul $ABEC$ este trapez isoscel.

Rezolvare:
a. Deoarece E este simetricul lui D față de AC, dreapta AC este mediatoarea segmentului DE (Figura 18). Ca urmare, punctul C este egal depărtat de capetele segmentului DE, adică $CD \equiv CE$. Cum $AB \equiv CD$ (întrucât $ABCD$ este paralelogram), rezultă $AB \equiv CE$.

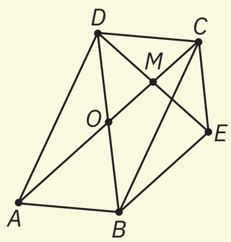


Figura 18

b. Fie $\{O\} = AC \cap BD$ și $\{M\} = DE \cap AC$. Atunci O este mijlocul diagonalei BD, iar M este mijlocul segmentului DE, deoarece se află pe mediatoarea acestui segment.
Deducem că segmentul OM este linie mijlocie în triunghiul DBE, deci $OM \parallel BE$, echivalent cu $BE \parallel AC$. Cum dreptele CE și CD au un punct comun, iar $AB \parallel CD$, rezultă că dreptele CE și AB nu sunt paralele. Așadar, $BE \parallel AC$ și $CE \nparallel AB$, deci $ABEC$ este trapez. Conform punctului **a**, avem $AB \equiv CE$, deci $ABEC$ este trapez isoscel.

Probleme propuse

1. Trapezul dreptunghic $ABCD$, $AB \parallel CD$, are $\sphericalangle ABC = 40°$. Determinați măsurile unghiurilor BAD, BCD și ADC.

2. În trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, unghiul A are măsura de 30°. Determinați măsurile celorlalte unghiuri ale trapezului.

3. Fie trapezul $ABCD$ cu lungimea bazei mari de 18 cm și lungimea bazei mici de 12 cm.

a. Calculați lungimea liniei mijlocii a trapezului $ABCD$.

b. Calculați lungimea segmentului determinat de mijloacele diagonalelor trapezului $ABCD$.

4. Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$, în care $AD \parallel BC$, $AD \perp AB$, $AB = 8$ cm și $\sphericalangle ADC = 30°$. Calculați lungimea segmentului CD.

5. Determinați lungimea înălțimii unui trapez isoscel ortodiagonal (*cu diagonalele perpendiculare*) știind că bazele au lungimile de 15 cm și 13 cm.

6. Dacă lungimea segmentului determinat de mijloacele diagonalelor unui trapez este egală cu 6 cm, iar lungimea bazei mari a trapezului este egală cu 28 cm, atunci calculați lungimea bazei mici a trapezului.

7. Determinați măsurile unghiurilor unui trapez isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, în care se știe că $\sphericalangle A = 4 \cdot \sphericalangle D$.

8. Pe latura AB a pătratului $ABCD$, $AB = 18$ cm, se consideră punctele S și T astfel încât $AS = ST = TB$. Demonstrați că trapezul $DCTS$ este isoscel și calculați lungimea liniei mijlocii a acestuia.

9. În trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 6$ cm, $\sphericalangle C = 60°$ și $CD = 10$ cm. Calculați perimetrul trapezului $ABCD$.

10. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$, în care $AB \parallel CD$, $AB = 6$ cm, $BC = 2\sqrt{2}$ cm, $\sphericalangle C = 45°$ și $BE \perp DC$, $E \in DC$.

a. Calculați măsurile celorlalte unghiuri ale trapezului $ABCD$.

b. Calculați lungimile segmentelor EC, DE și DC.

11. În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, avem $AD = DC = CB$, $\sphericalangle B = 60°$ și lungimea liniei mijlocii a trapezului de 10 cm. Calculați perimetrul trapezului $ABCD$.

Minitest

1. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 45°$. Demonstrați că dreptele AD și BC sunt perpendiculare. **(3p)**

2. Într-un trapez, lungimea liniei mijlocii este egală cu 20 cm, iar lungimea bazei mari a trapezului este egală cu 28 cm. Determinați lungimea bazei mici a trapezului. **(3p)**

3. În trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB \parallel CD$ și $AB < CD$, construim $BM \parallel AD$, $M \in DC$. Dacă $\sphericalangle MBC = \sphericalangle MCB$, atunci determinați măsura $\sphericalangle BAD$. **(3p)**

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Lecția 8: Perimetre și arii

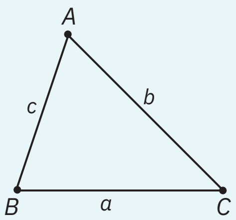
Cuvinte-cheie

arie · înălțime · bază · echivalente · perimetru · linie mijlocie

Perimetre

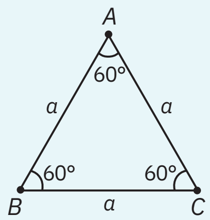
În clasa a V-a am învățat că perimetrul unei figuri geometrice mărginite de segmente de dreaptă este egal cu suma lungimilor acestor segmente. Pentru a nota perimetrul vom folosi, de regulă, litera $\mathcal{P}$.

Perimetrul unui triunghi oarecare



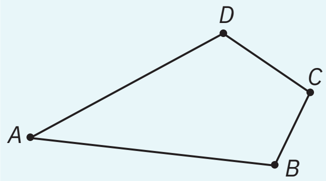
$\mathcal{P}_{ABC} = BC + CA + AB = a + b + c$

Perimetrul unui triunghi echilateral



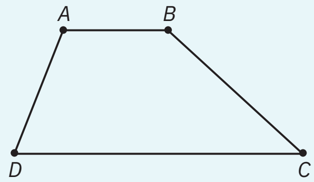
$\mathcal{P}_{ABC} = BC + CA + AB = 3a$

Perimetrul unui patrulater oarecare



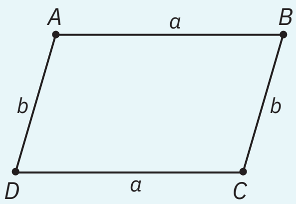
$\mathcal{P}_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$

Perimetrul unui trapez



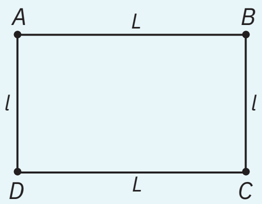
$\mathcal{P}_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$

Perimetrul unui paralelogram



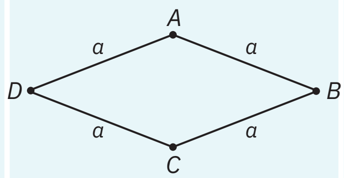
$\mathcal{P}_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD) = 2 \cdot (a + b)$

Perimetrul unui dreptunghi



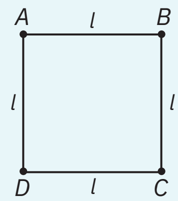
$\mathcal{P}_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD) = 2(L + l)$

Perimetrul unui romb



$\mathcal{P}_{ABCD} = 4 \cdot AB = 4 \cdot a$

Perimetrul unui pătrat



$\mathcal{P}_{ABCD} = 4 \cdot AB = 4 \cdot l$

Aria dreptunghiului. Aria pătratului (recapitulare)

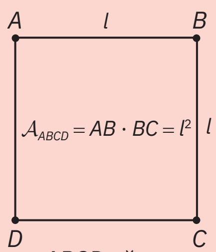
Din clasa a V-a știm că aria reprezintă o măsură a unei suprafețe mărginite de o figură geometrică și ne arată de câte ori se cuprinde o anumită unitate de măsură în acea suprafață. Aria se notează, de regulă, cu $\mathcal{A}$.

Unitatea principală de măsură pentru aria suprafețelor este metrul pătrat, notat m^2. Un metru pătrat este aria suprafeței delimitate de laturile unui pătrat cu lungimea laturii de un metru.

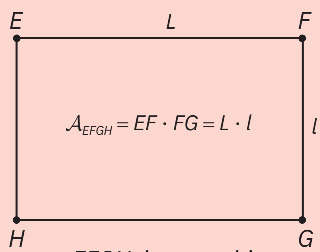
Multiplii metrului pătrat sunt dam^2, hm^2, km^2, iar submultiplii metrului pătrat sunt dm^2, cm^2, mm^2.

De reținut

1. Aria unui pătrat cu lungimea laturilor egală cu l este $\mathcal{A} = l^2$.
2. Aria unui dreptunghi cu lungimile laturilor egale cu L (pentru lungime), respectiv l (pentru lățime) este $\mathcal{A} = L \cdot l$.



ABCD pătrat



EFGH dreptunghi

4.8

Aria triunghiului

Situație-problemă

În triunghiul ABC din Figura 1, cu $BC = 4$ cm, înălțimea AD, $D \in BC$, are lungimea $AD = 3$ cm. Vom determina aria triunghiului ABC utilizând formula pentru aria dreptunghiului.

Construim dreptunghiurile $ADBQ$ și $ADCP$, ca în Figura 2.

Se observă că $\Delta ABD \equiv \Delta BAQ$ și $\Delta ADC \equiv \Delta CPA$ (cazul C.C.).

Întrucât două triunghiuri congruente au aceeași arie (deoarece suprafețele lor coincid prin suprapunere), rezultă că

$$\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABD} + \mathcal{A}_{ACD} = \frac{\mathcal{A}_{ADBQ}}{2} + \frac{\mathcal{A}_{ADCP}}{2} = \frac{\mathcal{A}_{BCPQ}}{2} = \frac{BC \cdot BQ}{2} = \frac{BC \cdot AD}{2} = 6 \text{ cm}^2 .$$

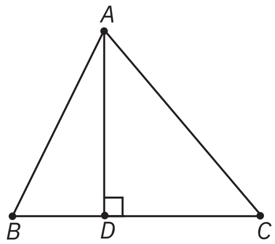


Figura 1

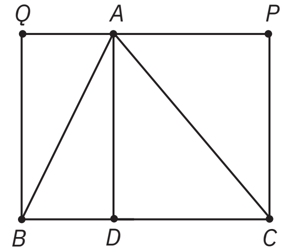


Figura 2

De reținut

Teoremă. Aria unui triunghi este egală cu jumătatea produsului dintre lungimea unei laturi și lungimea înălțimii corespunzătoare acesteia.

Aria unui triunghi se calculează cu formula $\mathcal{A} = \dfrac{b \cdot h}{2}$, unde h este lungimea înălțimii corespunzătoare unei laturi a triunghiului, iar b este lungimea acestei laturi (numită și *bază*).

Aria unui triunghi ascuțitunghic

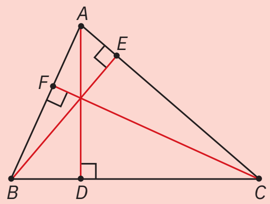


Figura 3

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{AC \cdot BE}{2} = \frac{AB \cdot CF}{2}$$

Aria unui triunghi dreptunghic

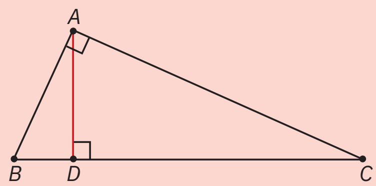


Figura 4

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{AB \cdot AC}{2}$$

Aria unui triunghi obtuzunghic

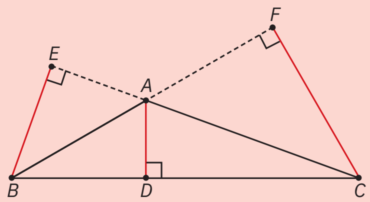


Figura 5

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{AC \cdot BE}{2} = \frac{AB \cdot CF}{2}$$

Observații

1. Două triunghiuri (sau în general, două figuri geometrice) care au aceeași arie se numesc *echivalente*.
2. Notând cu a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$) și cu h_a, h_b, h_c lungimile înălțimilor corespunzătoare ($AD = h_a$, $BE = h_b$, $CF = h_c$), avem $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{a \cdot h_a}{2} = \dfrac{b \cdot h_b}{2} = \dfrac{c \cdot h_c}{2}$.
3. Relația $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABC}$ arată că au loc următoarele proprietăți:
   - în orice triunghi, produsul dintre lungimea unei laturi și lungimea înălțimii corespunzătoare este constant;
   - lungimile laturilor unui triunghi sunt invers proporționale cu lungimile înălțimilor corespunzătoare.
4. Într-un triunghi dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, înălțimea corespunzătoare catetei AB este cateta AC și invers, deoarece $AB \perp AC$ (Figura 4). Dacă D este piciorul înălțimii din A, din relația $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{BC \cdot AD}{2} = \dfrac{AB \cdot AC}{2}$ deducem că $BC \cdot AD = AB \cdot AC$, adică $AD = \dfrac{AB \cdot AC}{BC}$. Așadar, *într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este raportul dintre produsul lungimilor catetelor și lungimea ipotenuzei.*
5. Mediana împarte un triunghi în două triunghiuri de arii egale.

   Într-adevăr, cu notațiile din Figura 6, dacă M este mijlocul laturii BC a triunghiului ABC, iar $AD \perp BC$, atunci AD este înălțime în triunghiurile ABC, ABM și respectiv AMC. Așadar, avem:

   $$\mathcal{A}_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{2} \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{A}_{ABC} \quad \text{și} \quad \mathcal{A}_{ACM} = \frac{1}{2} \cdot CM \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{2} \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{A}_{ABC},$$

   deci $\mathcal{A}_{ABM} = \mathcal{A}_{ACM} = \dfrac{1}{2} \cdot \mathcal{A}_{ABC}$.

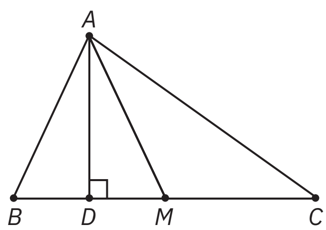


Figura 6

6. Aria unui patrulater convex *ABCD* se poate calcula descompunând suprafața mărginită de laturile patrulaterului în suprafețe triunghiulare (Figura 7):
$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABD} + \mathcal{A}_{CBD} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ADC} = \mathcal{A}_{OAB} + \mathcal{A}_{OBC} + \mathcal{A}_{OCD} + \mathcal{A}_{OAD}$.

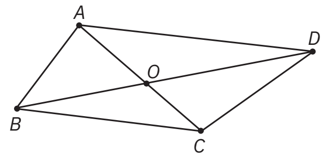


Figura 7

Aria paralelogramului

Considerăm paralelogramul *ABCD* în care construim $AE \perp CD$, $E \in CD$, și diagonala *AC* (Figura 8). Triunghiurile *ADC* și *CBA* sunt congruente, deci au ariile egale. În consecință:

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ACD} + \mathcal{A}_{ACB} = 2 \cdot \mathcal{A}_{ACD} = 2 \cdot \frac{AE \cdot CD}{2} = AE \cdot CD.$$

Asemănător, construind $AF \perp BC$, $F \in BC$, putem arăta că $\mathcal{A}_{ABCD} = AF \cdot BC$.

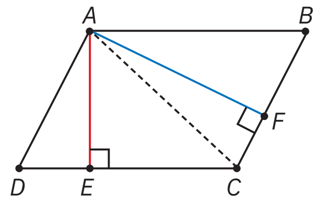


Figura 8

De reținut

Definiție. Un segment perpendicular pe laturile opuse ale unui paralelogram, cu o extremitate pe una dintre cele două laturi și cu cealaltă extremitate pe latura opusă, se numește *înălțime a paralelogramului*.

Lungimea acestui segment este egală cu distanța dintre cele două laturi opuse ale paralelogramului.

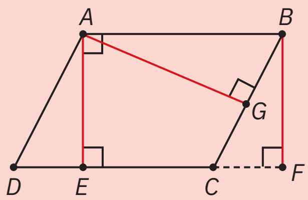


Figura 9

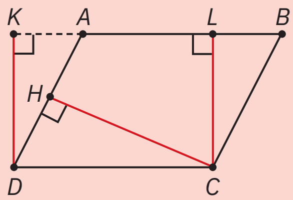


Figura 10

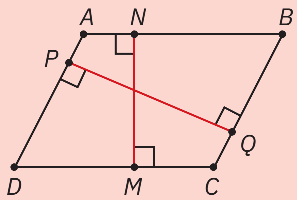


Figura 11

În figurile 9, 10 și 11, segmentele *AE*, *BF*, *CL*, *DK* și *MN* sunt înălțimi corespunzătoare laturilor *AB* și *CD*, iar segmentele *AG*, *CH* și *PQ* sunt înălțimi corespunzătoare laturilor *AD* și *BC*.

Observăm că $AE = BF = d(A, CD) = d(B, CD) = d(C, AB) = d(D, AB)$ și $CH = d(C, AD) = d(A, BC)$.

În plus, cu notațiile din Figura 9, deoarece $\sphericalangle AED = \sphericalangle BFC = 90°$, $AD \equiv BC$ și $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle BCF$, rezultă că $\Delta AED \equiv \Delta BFC$ (cazul I.U.), deci ariile triunghiurilor *AED* și *BFC* sunt egale.

În consecință, $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ADE} + \mathcal{A}_{AECB} = \mathcal{A}_{BCF} + \mathcal{A}_{AECB} = \mathcal{A}_{AEFB}$.

Deoarece patrulaterul *AECF* este dreptunghi, deducem că $\mathcal{A}_{AEFB} = AE \cdot AB = AE \cdot CD$ și regăsim astfel egalitatea $\mathcal{A}_{ABCD} = AE \cdot CD$.

Teoremă. Aria unui paralelogram este egală cu produsul dintre lungimea unei laturi și lungimea înălțimii corespunzătoare acesteia.

Dacă *h* este lungimea înălțimii corespunzătoare unei laturi (numită și *bază*) de lungime *b*, atunci $\mathcal{A} = b \cdot h$.

Exemplu

În Figura 12, patrulaterul *ABCD* este paralelogram, iar $AE \perp CD$, $E \in CD$, și $AF \perp BC$, $F \in CD$.

Știind că $AE = 8$ cm, $CD = 12$ cm și $BC = 6$ cm, vom calcula aria paralelogramului *ABCD* și distanța *AF* de la *A* la dreapta *BC*.

Avem $\mathcal{A}_{ABCD} = b \cdot h = DC \cdot AE = 12\text{ cm} \cdot 8\text{ cm} = 96\text{ cm}^2$.

Deoarece $\mathcal{A}_{ABCD} = BC \cdot AF = 6\text{ cm} \cdot d(A, BC)$, rezultă $d(A, BC) = 16$ cm.

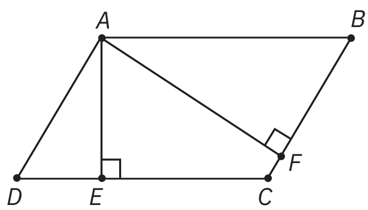


Figura 12

Observație

Dacă *O* este intersecția diagonalelor paralelogramului *ABCD*, atunci *BO* și *DO* sunt mediane în triunghiurile *BAC*, respectiv *DAC* (Figura 13).

Așadar, $\mathcal{A}_{OAB} = \mathcal{A}_{OBC}$ și $\mathcal{A}_{OAD} = \mathcal{A}_{OCD}$. Cum *AO* este mediană în triunghiul *ABD*, rezultă și $\mathcal{A}_{OAB} = \mathcal{A}_{OAD}$, deci $\mathcal{A}_{OAB} = \mathcal{A}_{OBC} = \mathcal{A}_{OAD} = \mathcal{A}_{OCD} = \frac{1}{4} \cdot \mathcal{A}_{ABCD}$.

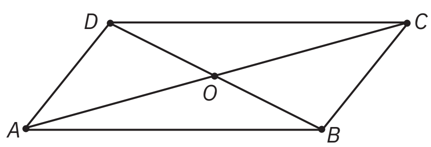


Figura 13

4.8

Aria rombului

Fie $ABCD$ un romb, $AC \cap BD = \{O\}$, iar AE și AF înălțimi corespunzătoare laturilor BC, respectiv CD (Figura 14).

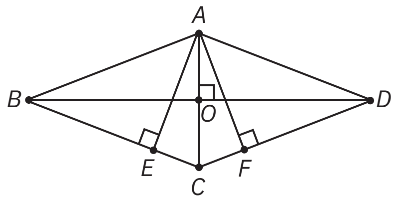


Figura 14

1. Deoarece rombul este un paralelogram particular, aria sa se poate calcula cu formula $\mathcal{A} = b \cdot h$, unde b este lungimea bazei, iar h este lungimea înălțimii corespunzătoare bazei. Astfel, $\mathcal{A}_{ABCD} = BC \cdot AE = CD \cdot AF$.
Observăm că, întrucât $BC = CD$, avem $AE = AF$, adică $d(AD, BC) = d(AB, CD)$.
Cu alte cuvinte, *lungimile înălțimilor construite din același vârf al unui romb sunt egale* și reprezintă distanța dintre dreptele suport ale laturilor opuse.

2. Deoarece $BD \perp AC$, BO și DO sunt înălțimi în triunghiurile BAC, respectiv DAC. Atunci:

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{BAC} + \mathcal{A}_{DAC} = \frac{AC \cdot BO}{2} + \frac{AC \cdot DO}{2} = \frac{AC \cdot (BO + DO)}{2} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2},$$

unde d_1 și d_2 sunt lungimile diagonalelor rombului.

Exemplu

În Figura 15, rombul $ABCD$ are perimetrul de 20 cm, $AC = 6$ cm și $BD = 8$ cm.
Vom calcula distanța AK de la punctul A la latura CD, unde $K \in CD$.
Deoarece perimetrul rombului este $\mathcal{P} = 4 \cdot CD$, deducem că $CD = 5$ cm.
Calculând aria rombului în două moduri, obținem $\mathcal{A}_{ABCD} = AK \cdot CD$, respectiv $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = 24$ cm^2, de unde rezultă că $d(A, CD) = AK = 4{,}8$ cm.

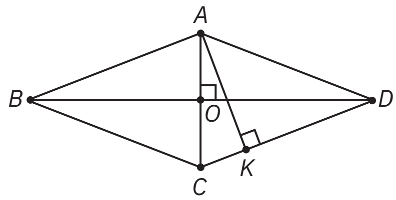


Figura 15

Aria trapezului

De reținut

Considerăm trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$ și $AB < CD$, în care construim $AE \perp CD$ și $BF \perp CD$, unde $E, F \in CD$ (Figura 16). Patrulaterul $AEFB$ este dreptunghi, deci $AB = EF$ și $AE = BF$. Deducem că:

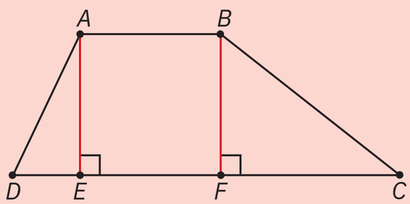


Figura 16

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{AED} + \mathcal{A}_{AEFB} + \mathcal{A}_{BFC} = \frac{AE \cdot ED}{2} + AE \cdot EF + \frac{BF \cdot FC}{2} =$$
$$= \frac{AE \cdot (DE + 2EF + FC)}{2} = \frac{AE \cdot (EF + DC)}{2} = \frac{AE \cdot (AB + CD)}{2}.$$

Definiție. Un segment perpendicular pe bazele unui trapez, cu o extremitate pe baza mică și cu cealaltă extremitate pe baza mare, se numește *înălțime a trapezului*.
Lungimea unei înălțimi a unui trapez este egală cu distanța dintre cele două baze ale trapezului.
Teoremă. Aria unui trapez este egală cu produsul dintre semisuma lungimilor bazelor și lungimea înălțimii.

Notând cu b lungimea bazei mici, cu B lungimea bazei mari și cu h lungimea înălțimii, aria trapezului este $\mathcal{A} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$.

Exemplu

În Figura 17, în trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, se știe că $\sphericalangle A = 45°$, $AB = 8$ cm și $CD = 2$ cm. Vom calcula aria trapezului $ABCD$.

Construim $DP \perp AB$, $P \in AB$. Obținem $AP = \frac{AB - CD}{2} = 3$ cm.

Deoarece triunghiul APD este dreptunghic isoscel, rezultă că $DP = AP = 3$ cm.

Așadar, $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{B + b}{2} \cdot h = \frac{AB + DC}{2} \cdot DP = 15$ cm^2.

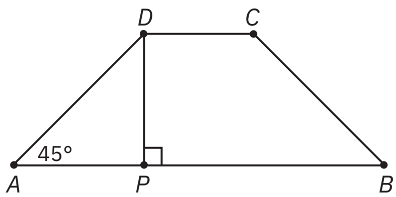


Figura 17

Estimarea perimetrului și a ariei unei figuri geometrice prin descompunere în figuri cunoscute

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. O figură geometrică plană, închisă, delimitată de n segmente A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1, astfel încât oricare două segmente au cel mult un punct în comun, se numește *poligon cu n laturi*. Notăm poligonul cu $A_1A_2...A_n$. Punctele A_1, A_2, ..., A_n se numesc vârfurile poligonului. De exemplu, un triunghi este un poligon cu trei laturi, iar un patrulater este un poligon cu patru laturi. Un poligon cu cinci laturi se numește *pentagon*, iar un poligon cu șase laturi se numește *hexagon*.

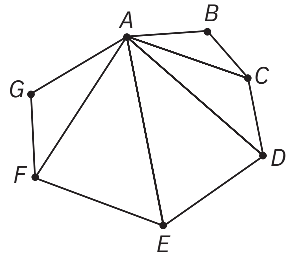


Figura 18

Perimetrul unui poligon $A_1A_2...A_n$ este egal cu suma lungimilor laturilor sale:

$$\mathcal{P}_{A_1A_2...A_n} = A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n + A_nA_1.$$

Suprafața mărginită de laturile unui poligon se numește *suprafață poligonală*. Aria unei suprafețe poligonale (sau – pentru a simplifica limbajul – *aria poligonului*), se poate calcula descompunând această suprafață în suprafețe triunghiulare.

În Figura 18, aria *heptagonului* (poligon cu șapte laturi) *ABCDEFG* este egală cu $\mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ACD} + \mathcal{A}_{ADE} + \mathcal{A}_{AEF} + \mathcal{A}_{AFG}$.

Activitate pe grupe

Elevii unei clase se împart în patru grupe. Pentru rezolvarea problemelor propuse, utilizează trusa de geometrie. Fiecare grupă primește câte o foaie, din care trebuie să decupeze figuri geometrice cu o anumită arie, astfel:

- prima grupă trebuie să decupeze un triunghi cu aria de 18 cm^2;
- a doua grupă trebuie să decupeze un paralelogram cu aria de 18 cm^2;
- a treia grupă – un romb cu aria de 18 cm^2;
- a patra grupă – un trapez cu aria de 18 cm^2.

Elevii vor prezenta figurile geometrice obținute și vor justifica faptul că fiecare are aria de 18 cm^2.

Portofoliu

Pe o coală de hârtie construiți un trapez oarecare *ABCD*, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$. Prelungiți baza mare dincolo de *B*, cu un segment $BE \equiv CD$. Prelungiți baza mică dincolo de *C*, cu un segment $CF \equiv AB$. Cu ajutorul figurii obținute, deduceți aria trapezului utilizând formula pentru aria paralelogramului.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Se consideră un punct oarecare *M* pe latura *BC* a triunghiului *ABC*. Demonstrați că $\dfrac{\mathcal{A}_{ABM}}{\mathcal{A}_{ACM}} = \dfrac{BM}{CM}$.

Rezolvare:

Construim înălțimea *AD*, unde *D* se află pe dreapta *BC*. Avem $\dfrac{\mathcal{A}_{ABM}}{\mathcal{A}_{ACM}} = \dfrac{\frac{AD \cdot BM}{2}}{\frac{AD \cdot CM}{2}} = \dfrac{AD \cdot BM}{AD \cdot CM} = \dfrac{BM}{CM}$.

2. În triunghiul *ABC*, se notează cu *M*, *N* și *P* mijloacele laturilor *BC*, *CA*, respectiv *AB*, și cu *G* centrul de greutate. Arătați că:

a. $\mathcal{A}_{BGM} = \mathcal{A}_{CGM}$; **b.** $\mathcal{A}_{ABC} = 3 \cdot \mathcal{A}_{GBC}$; **c.** $\mathcal{A}_{ABC} = 6 \cdot \mathcal{A}_{BGM}$.

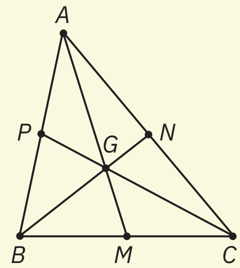


Figura 19

Rezolvare:

a. Folosim rezultatul din problema rezolvată 1. Avem $\dfrac{\mathcal{A}_{GBM}}{\mathcal{A}_{GCM}} = \dfrac{BM}{CM} = 1$, deci $\mathcal{A}_{BGM} = \mathcal{A}_{CGM}$.

Regăsim astfel faptul că mediana *GM* împarte triunghiul *GBC* în două triunghiuri echivalente (Figura 19), adică $\mathcal{A}_{BGM} = \mathcal{A}_{CGM} = \dfrac{1}{2}\mathcal{A}_{GBC}$.

b. În triunghiul *BAM*, punctul *G* aparține laturii *AM*, deci $\dfrac{\mathcal{A}_{BAG}}{\mathcal{A}_{BMG}} = \dfrac{AG}{MG} = 2$. Analog, din triunghiul *CAM* rezultă că $\dfrac{\mathcal{A}_{CAG}}{\mathcal{A}_{CMG}} = \dfrac{AG}{MG} = 2$. Așadar, $\mathcal{A}_{BAG} = 2 \cdot \mathcal{A}_{BMG} = \mathcal{A}_{BCG}$ și $\mathcal{A}_{CAG} = 2 \cdot \mathcal{A}_{CMG} = \mathcal{A}_{BCG}$. Cum $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{GAB} + \mathcal{A}_{GBC} + \mathcal{A}_{GAC}$ și $\mathcal{A}_{GAB} = \mathcal{A}_{GBC} = \mathcal{A}_{GAC}$, rezultă că $\mathcal{A}_{ABC} = 3 \cdot \mathcal{A}_{GBC}$.

c. Cum $\mathcal{A}_{ABC} = 3 \cdot \mathcal{A}_{GBC}$ și $\mathcal{A}_{BGM} = \dfrac{1}{2}\mathcal{A}_{GBC}$, rezultă că $\mathcal{A}_{ABC} = 6 \cdot \mathcal{A}_{BGM}$.

3. În triunghiul ABC, dreptunghic în A, se dau $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm. Determinați:
a. aria triunghiului; **b.** perimetrul triunghiului; **c.** distanța de la punctul A la dreapta BC.

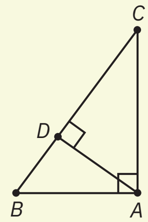


Figura 20

Rezolvare:

a. Triunghiul ABC este dreptunghic în A, deci $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2}$ cm^2 $= 24$ cm^2 (Figura 20).

b. Aplicând teorema lui Pitagora (învățată în clasa a VI-a) rezultă că $BC^2 = AB^2 + AC^2$, de unde obținem $BC = 10$ cm. Așadar, $\mathcal{P}_{ABC} = AB + AC + BC = 6$ cm $+ 8$ cm $+ 10$ cm $= 24$ cm.

c. Fie $AD \perp BC$, $D \in BC$. Atunci $d(A, BC) = AD$ și AD este înălțime în triunghiul ABC dreptunghic în A. Obținem $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{6 \cdot 8}{10}$ cm $= 4{,}8$ cm, deci $d(A, BC) = AD = 4{,}8$ cm.

4. Fie $ABCD$ paralelogram, cu $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $AD = 6$ cm și $\sphericalangle A = 30°$.
a. Arătați că perimetrul paralelogramului este mai mic de 33 cm.
b. Determinați aria paralelogramului și distanța de la punctul D la dreapta BC.

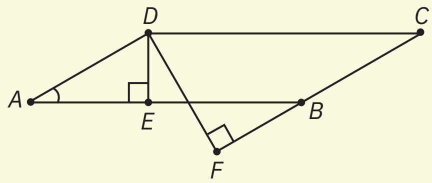


Figura 21

Rezolvare:

a. Avem $\mathcal{P}_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD) = 2 \cdot \left(6\sqrt{3} + 6\right)$ cm $= \left(12 + \sqrt{432}\right)$ cm. Deoarece $\sqrt{432} < \sqrt{441} = 21$, rezultă că $12 + \sqrt{432} < 12 + 21 = 33$, deci $\mathcal{P}_{ABCD} < 33$ cm.

b. Construim $DE \perp AB$ și $DF \perp BC$, cu $E \in AB$, $F \in BC$. Atunci $d(D, BC) = DF$ și $\mathcal{A}_{ABCD} = AB \cdot DE = DF \cdot BC$ (1).
Deoarece triunghiul dreptunghic AED are un unghi de 30°, lungimea catetei DE, opusă acestui unghi, este jumătate din lungimea ipotenuzei. Așadar, $DE = \frac{1}{2} \cdot AD = 3$ cm, deci $\mathcal{A}_{ABCD} = AB \cdot DE = 18\sqrt{3}$ cm^2. Din relația (1) obținem $BC \cdot DF = 18\sqrt{3}$ cm^2 și, cum $BC = AD = 6$ cm, rezultă că $d(D, BC) = DF = 3\sqrt{3}$ cm.
Alternativ, putem observa că triunghiul CFD, dreptunghic în F, are $\sphericalangle C = 30°$, deci $DF = \frac{1}{2} \cdot CD = 3\sqrt{3}$ cm.

5. Un romb $ABCD$, cu $AC \cap BD = \{O\}$, are perimetrul egal cu 48 cm, iar distanța de la punctul B la dreapta CD este egală cu $6\sqrt{3}$ cm.
Fie E simetricul punctului O față de dreapta AD. Determinați:
a. aria rombului $ABCD$; **b.** aria patrulaterului $ABCE$.

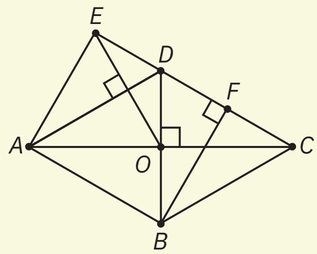


Figura 22

Rezolvare:

a. Fie $BF \perp CD$, $F \in CD$; atunci $d(B, CD) = BF = 6\sqrt{3}$ cm. Cum $ABCD$ este romb, rezultă că $\mathcal{P}_{ABCD} = 4 \cdot CD$, de unde $CD = 12$ cm, deci $\mathcal{A}_{ABCD} = CD \cdot BF = 72\sqrt{3}$ cm^2.

b. Din $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2}$ rezultă că $AC \cdot BD = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABCD} = 144\sqrt{3}$ cm^2. Deoarece $BC = 12$ cm, folosind teorema lui Pitagora în triunghiul BCF rezultă că $FC = 6$ cm, așadar unghiul BCF are măsura de 60°, deci triunghiul BCD este echilateral. Prin urmare, $\sphericalangle BDC = 60°$. Dar $\sphericalangle BDC \equiv \sphericalangle BDA$ (diagonala DB a rombului $ABCD$ este bisectoarea unghiului ADC), deci $\sphericalangle ADC = 2 \cdot \sphericalangle BDC = 120°$ (Figura 22).
Deoarece punctul E este simetricul lui O față de dreapta AD, rezultă că dreapta AD este mediatoarea segmentului EO, deci $d(D, E) = d(D, O)$, adică $DE = DO = \frac{1}{2} \cdot BD = 6$ cm. Triunghiul DEO este isoscel de bază EO, deci mediatoarea DA a bazei este și bisectoarea unghiului ODE. Obținem $\sphericalangle EDA = \sphericalangle BDA = 60°$, deci $\sphericalangle EDC = \sphericalangle EDA + \sphericalangle ADC = 60° + 120° = 180°$. Rezultă de aici că punctele E, D, C sunt coliniare, în această ordine, deci $CE = CD + DE = 12$ cm $+ 6$ cm $= 18$ cm.
Observăm că $AB \parallel CD$, deci $AB \parallel CE$. În plus, cum $AD \parallel BC$, iar dreptele AD și AE sunt diferite, din axioma paralelelor, rezultă că $AE \nparallel BC$. Așadar, $ABCE$ este trapez, deci $\mathcal{A}_{ABCE} = \frac{(CE + AB) \cdot BF}{2} = 90\sqrt{3}$ cm^2.

Probleme propuse

1. **a.** Determinați aria unui dreptunghi cu lungimea de 8 centimetri și lățimea de 7 centimetri.
   b. Determinați aria unui triunghi dreptunghic isoscel cu lungimea unei catete de 6 centimetri.
   c. Determinați aria unui triunghi dreptunghic isocel cu lungimea ipotenuzei de 12 centimetri.
   d. Determinați aria unui pătrat cu lungimea laturii de 4 centimetri.
   e. Determinați aria unui pătrat cu lungimea diagonalei de 8 centimetri.
   f. Determinați aria unui paralelogram cu lungimea unei laturi de 9 centimetri și lungimea înălțimii corespunzătoare laturii de 4 centimetri.
   g. Determinați aria unui romb cu lungimile diagonalelor de 10 centimetri și 16 centimetri.
   h. Determinați aria unui trapez cu lungimile bazelor de 7 centimetri și 5 centimetri, iar lungimea înălțimii de 3 centimetri.
   i. Determinați aria unui trapez cu lungimea liniei mijlocii de 14 centimetri și lungimea înălțimii de 8 centimetri.
2. În triunghiul ABC se ia punctul M pe latura BC astfel încât $BM = 2$ cm și $MC = 6$ cm. Demonstrați că $\mathcal{A}_{AMC} = 3 \cdot \mathcal{A}_{ABM}$.
3. În dreptunghiul $ABCD$, dacă $AB = 12$ cm, $BC = 8$ cm și punctele M și P sunt mijloacele laturilor AB și AD, calculați:
   a. aria și perimetrul dreptunghiului $ABCD$; **b.** aria triunghiului ABC; **c.** aria triunghiului AMD;
   d. aria triunghiului DMC; **e.** aria triunghiului DMP; **f.** aria trapezului $DCBM$.
4. Rombul $ABCD$ are aria de 36 cm^2. Calculați aria triunghiului ABC și aria triunghiului ABD.
5. Un triunghi dreptunghic isoscel are aria de 25 cm^2. Determinați lungimea ipotenuzei triunghiului.
6. În trapezul isoscel $ABCD$, dacă $AB \parallel CD$, $\sphericalangle C = 135°$, $AB = 12$ cm, $CD = 4$ cm, calculați aria trapezului $ABCD$.
7. În dreptunghiul $ABCD$, dacă $AC = 15$ cm și distanța de la punctul B la dreapta AC este egală cu 10 cm, calculați aria dreptunghiului $ABCD$.
8. În paralelogramul $ABCD$, $AB = 7$ cm, $AD = 12$ cm și $\sphericalangle A = 30°$. Calculați aria paralelogramului $ABCD$.
9. Se consideră patrulaterul $ABCD$ cu diagonalele perpendiculare (un astfel de patrulater se numește *patrulater ortodiagonal*). Dacă $AC = 10$ cm și $BD = 20$ cm, atunci calculați aria patrulaterului $ABCD$.
10. Calculați aria unui trapez isoscel ortodiagonal cu lungimea liniei mijlocii de 22 cm.
11. Un romb este echivalent cu un dreptunghi care are aria de 135 cm^2. Determinați lungimea unei diagonale a rombului știind că lungimea celeilalte diagonale este de 15 cm.
12. Calculați aria unui paralelogram $ABCD$ știind că $AC \cap BD = \{O\}$ și că aria triunghiului AOB este egală cu 11 cm^2.
13. Figura 23 este formată din 5 pătrate cu latura de 2 centimetri. Calculați aria dreptunghiului $A_1A_6B_6B_1$, aria triunghiului $A_1A_4B_6$ și aria trapezului $A_2B_4B_5A_6$.

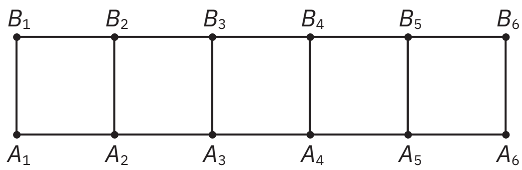


Figura 23

Autoevaluare

1. În Figura 24 sunt reprezentate 4 pătrate cu latura de 2 centimetri. Calculați aria triunghiului ABC. **(3p)**

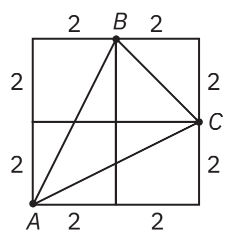


Figura 24

2. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 6$ cm, $CD = 12$ cm și $\sphericalangle BCD = 45°$. Arătați că:
   a. aria trapezului $ABCD$ este egală cu 27 cm^2;
   b. aria triunghiului ABC este egală cu 9 cm^2. **(3p)**
3. Rombul $ABCD$ are $AB = 10$ cm și $AC = 16$ cm.
   a. Calculați perimetrul rombului $ABCD$.
   b. Determinați aria rombului $ABCD$.
   c. Calculați distanța de la punctul B la dreapta CD. **(3p)**

Notă. La exercițiul 2, se alocă 1,5 puncte pentru fiecare subpunct rezolvat corect. La exercițiul 3, se alocă 1 punct pentru fiecare subpunct rezolvat corect. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Recapitulare și evaluare

Patrulaterul convex. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex • Paralelogramul; proprietăți • Linia mijlocie în triunghi • Dreptunghiul; proprietăți • Rombul; proprietăți • Pătratul; proprietăți • Trapezul; proprietăți • Perimetre și arii

Pentru problemele 1-22, notați în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect. Pentru exercițiile 23-32, scrieți rezolvările complete.

1. O diagonală a patrulaterului convex $ABCD$ este:

a. AD; **b.** BD.

2. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, dreptunghic în A și $AG = 4$ cm, atunci BC este de:

a. 6 cm; **b.** 8 cm; **c.** 10 cm; **d.** 12 cm.

3. Dacă AM este mediană în triunghiul ABC, G este centrul de greutate al triunghiului și $AG = 12$ cm, atunci AM este de:

a. 12 cm; **b.** 6 cm; **c.** 18 cm; **d.** 24 cm.

4. Aria unui romb cu diagonalele de 12 cm și 6 cm este egală cu:

a. 72 cm^2; **b.** 36 cm^2; **c.** 18 cm^2; **d.** 36 cm.

5. Dacă $ABCD$ este dreptunghi, $AC \cap BD = \{O\}$ și $AO = 3$ cm, atunci BD este egală cu:

a. 6 cm; **b.** 3 cm; **c.** 9 cm; **d.** 12 cm.

6. Dacă $ABCD$ este paralelogram și $\sphericalangle A = 100°$, atunci $\sphericalangle D$ este egal cu:

a. 50°; **b.** 100°; **c.** 150°; **d.** 80°.

7. Perimetrul unui triunghi este 30 cm. Perimetrul triunghiului determinat de liniile sale mijlocii este egal cu:

a. 15 cm; **b.** 10 cm.

8. Dacă $ABCD$ este pătrat, atunci măsura unghiului ACD este egală cu:

a. 60°; **b.** 45°.

9. Aria unui triunghi cu baza de 12 cm și înălțimea corespunzătoare de 10 cm este egală cu:

a. 22 cm^2; **b.** 60 cm^2; **c.** 120 cm^2; **d.** 30 cm^2.

10. Aria dreptunghiului cu lungimea de 8 cm și lățimea de 6 cm este egală cu:

a. 48 cm^2; **b.** 14 cm^2; **c.** 28 cm^2; **d.** 12 cm^2.

11. Perimetrul rombului cu latura de 16 cm este egal cu:

a. 256 cm; **b.** 128 cm; **c.** 32 cm; **d.** 64 cm.

12. Linia mijlocie a unui trapez este de 10 cm. Dacă baza mare este de 12 cm, atunci baza mică este de:

a. 2 cm; **b.** 1 cm; **c.** 8 cm; **d.** 22 cm.

13. Perimetrul unui triunghi echilateral este egal cu perimetrul unui pătrat. Raportul dintre lungimea laturii pătratului și lungimea laturii triughiului echilateral este egal cu:

a. $\frac{4}{3}$; **b.** $\frac{3}{4}$; **c.** $\frac{9}{16}$; **d.** $\frac{16}{9}$.

14. Un romb și un pătrat sunt echivalente. Aria pătratului este egală cu 144 cm^2, iar lungimea unei diagonale a rombului este egală cu 9 cm. Lungimea celeilalte diagonale a rombului este egală cu:

a. 18 cm; **b.** 12 cm; **c.** 32 cm; **d.** 16 cm.

15. Linia mijlocie a unui trapez este $\frac{2}{3}$ din lungimea bazei mari a trapezului. Raportul dintre baza mare și baza mică este egal cu:

a. 6; **b.** $\frac{3}{2}$; **c.** 3; **d.** $\frac{1}{3}$.

16. Dacă diagonalele unui paralelogram $ABCD$ sunt perpendiculare și $\sphericalangle BAD = 20°$, atunci măsura unghiului DBC este egală cu:

a. 80°; **b.** 160°; **c.** 10°; **b.** 40°.

17. Numărul axelor de simetrie ale unui pătrat este de:

a. 2; **b.** 4.

18. Numărul axelor de simetrie ale unui trapez isoscel este de:

a. 1; **b.** 0.

19. Mediana corespunzătoare ipotenuzei unui triunghi dreptunghic isoscel este de 10 cm. Aria triunghiului este egală cu:

a. 100 cm^2; **b.** 200 cm^2.

20. Linia mijlocie a unui trapez este de 12 cm, iar înălțimea trapezului are 7 cm. Aria trapezului este egală cu:

a. 42 cm^2; **b.** 84 cm^2.

21. În dreptunghiul $ABCD$, $\sphericalangle ADB = 60°$. Măsura unghiului BCA este egală cu:

a. 30°; **b.** 60°.

22. În rombul $ABCD$, $\sphericalangle BCD = 30°$ și $AB = 14$ cm. Distanța de la punctul D la dreapta BC este egală cu:

a. 28 cm; **b.** 7 cm.

23. Precizați care dintre enunțurile de mai jos este adevărat și care este fals:

a. Latura unui pătrat cu aria de 49 cm^2 este de 7 cm.

b. Linia mijlocie a unui trapez este egală cu semisuma bazelor.

c. Centrul de greutate al unui triunghi este și mijlocul unei mediane a triunghiului.

d. În orice romb, diagonalele sunt perpendiculare.

24. Asociați fiecărei fracții din coloana **A** denumirea corespunzătoare din coloana **B**.

A	**B**
$\mathcal{A} = L \cdot l$	Aria rombului
$\mathcal{A} = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$	Aria dreptunghiului
$\mathcal{A} = \dfrac{(B+b)}{2} \cdot h$	Aria paralelogramului
	Aria trapezului

25. Determinați numerele naturale a, b, c și d din tabelul de mai jos:

Aria pătratului $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$	a, b, c, d
16	$AB = a$
64	$\mathcal{A}_{ABD} = b$
100	$\mathcal{A}_{BOC} = c$
25	$AC \cdot BD = d$

26. Determinați numerele a, b, c și d pentru care următoarele afirmații sunt adevărate.

Dacă MN este linie mijlocie în ABC, $MN \parallel BC$, $MN = 13$ cm, atunci $BC = a$ cm.
Dacă aria rombului $ABCD$ este egală cu 18 cm^2 și $AC = 6$ cm, atunci $BD = b$ cm.
Dacă $ABCD$ este paralelogram, $\sphericalangle A = 30°$ și $AD = 18$ cm, atunci $d(D, AB) = c$ cm.
Dacă aria pătratului $ABCD$ este egală cu 64 cm^2, atunci distanța de la A la dreapta BD este egală cu d cm.

27. Se consideră pătratul $ABCD$, cu $AB = 8$ cm. Dacă punctele M și P sunt mijloacele laturilor DC și BC ale pătratului $ABCD$.

a. Arătați că aria triunghiului ADM este egală cu 16 cm^2.

b. Calculați aria patrulaterului $AMPB$.

28. În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 8$ cm, $DC = 12$ cm, unghiul C are măsura de 30° și $AD \perp BC$. Fie E un punct pe latura CD, astfel încât $CE = 8$ cm.

a. Arătați că patrulaterul $ABCE$ este paralelogram.

b. Calculați lungimea laturii AD a trapezului.

29. Se consideră punctul M mijlocul laturii BC a paralelogramului $ABCD$ și $AM \cap DC = \{P\}$.

a. Demonstrați că triunghiurile DMC și MCP au ariile egale.

b. Determinați valoarea raportului dintre aria triunghiului ADM și aria paralelogramului $ABCD$.

30. În exteriorul dreptunghiului $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABM și BCP.

a. Demonstrați că triunghiul MDP este echilateral.

b. Arătați că $MB \perp CP$.

31. În rombul $ABCD$, cu $AC \cap BD = \{O\}$, punctele E și F sunt mijloacele laturilor AD, respectiv AB, iar H este un punct pe dreapta CD astfel încât $EH \parallel AC$. Arătați că:

a. patrulaterul $BDEF$ este trapez isoscel;

b. punctele F, O, H sunt coliniare.

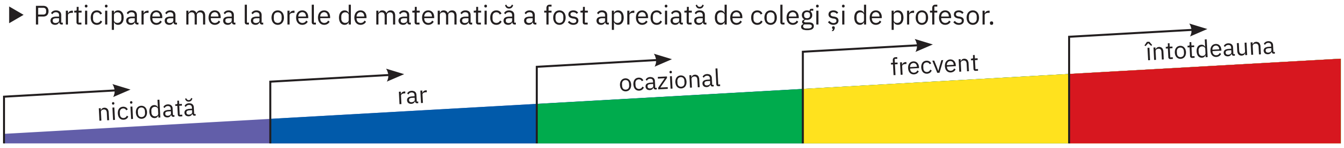
32. Patrulaterul $ABCD$ este paralelogram, cu $AC = BD$ și $AD = 4$ cm. Fie O mijlocul segmentului AC, iar E un punct pe latura AB astfel încât $AE = 3$ cm și $EO \perp BD$.

a. Arătați că aria triunghiului ADE este egală cu 6 cm^2.

b. Determinați perimetrul patrulaterului $ABCD$.

Fișa de observare sistematică

- ▶ Am fost preocupat să aflu lucruri noi despre metodele de rezolvare a problemelor.
- ▶ Participarea mea la orele de matematică a fost apreciată de colegi și de profesor.



U5 Cercul

Cercul este o formă fundamentală, care se găsește peste tot, de la atomi la stele, și care a oferit umanității mobilitate, odată cu inventarea roții. Este o figură geometrică fără muchii ascuțite, care permite o vizualizare mai rapidă a proceselor și de aceea este utilizată în diagrame. Legendarul Rege Arthur își dorea ca toți cavalerii de la curtea lui să fie considerați egali și să nu lupte pentru un rang superior. Oamenii care stau așezați și discută în jurul unei mese rotunde se simt egali.

5.1

Lecția 1: Cercul. Coarde și arce în cerc. Proprietăți

Cuvinte-cheie

cerc | arce | coarde | unghi la centru | diametru | rază

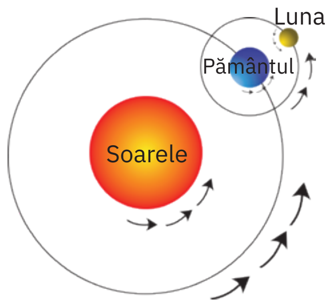
Coarde și arce în cerc

Mate practică

În imaginea alăturată sunt reprezentate schematic Soarele, planeta Pământ și satelitul natural al Pământului, Luna.

Reprezentarea este realizată cu ajutorul a trei cercuri. Analizând scara planșei, putem calcula razele celor trei corpuri astronomice și distanțele dintre corpuri.

Extindem și reamintim următoarele noțiuni introduse în clasa a VI-a:



De reținut

Cercul

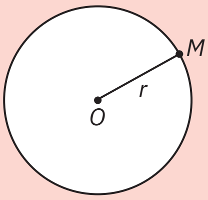
Fiind dat un punct O și un număr real pozitiv r, se numește *cerc de centru O și rază r* mulțimea punctelor din planul $\mathcal{P}$ situate la distanța r față de punctul O. Notăm $\mathcal{C}(O, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid OM = r\}$. Definim și următoarele mulțimi:

$\text{Int}\,\mathcal{C}(O, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid OM < r\}$, numită *interiorul* cercului de centru O și rază r;

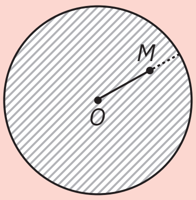
$\text{Ext}\,\mathcal{C}(O, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid OM > r\}$, numită *exteriorul* cercului de centru O și rază r;

$\mathcal{D}(O, r) = \mathcal{C}(O, r) \cup \text{Int}\,\mathcal{C}(O, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid OM \le r\}$, numită *discul* de centru O și rază r.

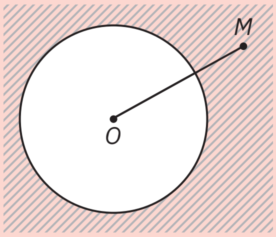
$\mathcal{C}(O, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid OM = r\}$



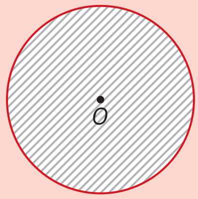
$\text{Int}\,\mathcal{C}(O, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid OM < r\}$



$\text{Ext}\,\mathcal{C}(O, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid OM > r\}$



$\mathcal{D}(O, r) = \mathcal{C}(O, r) \cup \text{Int}\,\mathcal{C}(O, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid OM \le r\}$



Coardă în cerc

Segmentul cu extremitățile în două puncte distincte aflate pe un cerc se numește *coardă*.

O coardă care conține centrul cercului se numește *diametru*. Capetele unui diametru se numesc *puncte diametral opuse*.

Într-un cerc de rază r, lungimea oricărui diametru este egală cu $2r$ și este mai mare sau egală cu lungimea oricărei alte coarde.

În Figura 1, AB și CD sunt două coarde în cerc. Mai mult, coarda CD este diametru, deoarece conține centrul O al cercului. Punctele C și D, capetele diametrului CD, sunt puncte diametral opuse.

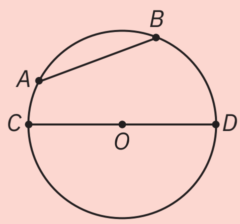


Figura 1

Unghi la centru

Un unghi cu vârful în centrul unui cerc se numește *unghi la centru*.

Unghiurile AOB și COD din Figura 2 sunt unghiuri la centru în cercul de centru O și rază r.

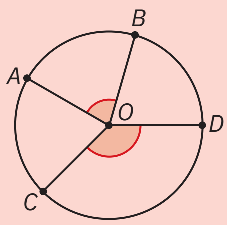


Figura 2

Arc de cerc

Mulțimea punctelor unui cerc situate de aceeași parte a unei coarde, la care se adaugă capetele coardei, se numește *arc de cerc*.

Extremitățile coardei sunt, în același timp, capetele (extremitățile) arcului.

Două puncte diametral opuse determină pe un cerc două arce numite semicercuri.

Două puncte diferite A și B de pe un cerc, care nu sunt diametral opuse, determină două arce de cerc:

- *arcul mic* $\overset{\frown}{AB}$ – mulțimea punctelor de pe cerc aflate în interiorul unghiului AOB, la care adăugăm punctele A și B;
- *arcul mare* $\overset{\frown}{AB}$ – mulțimea punctelor de pe cerc aflate în exteriorul unghiului AOB, la care adăugăm punctele A și B.

Pentru a evita confuzia între cele două arce, pentru notarea arcului mare vom utiliza încă un punct al arcului; de exemplu, în Figura 3, arcul mare $\overset{\frown}{AB}$ se notează $\overset{\frown}{ACB}$, unde punctul C este un punct de pe cerc, aflat în exteriorul unghiului AOB.

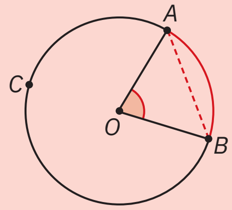


Figura 3

Măsura unui arc de cerc

Măsura arcului mic $\overset{\frown}{AB}$ este egală cu măsura unghiului la centru AOB, iar măsura arcului mare $\overset{\frown}{AB}$ este egală cu $360° - \sphericalangle AOB$.

Măsura unui semicerc este egală cu 180°, iar măsura unui cerc este de 360°.

Două arce $\overset{\frown}{AB}$ și $\overset{\frown}{CD}$ ale aceluiași cerc sau care fac parte din cercuri congruente se numesc *congruente* dacă au aceeași măsură. Notăm: $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$.

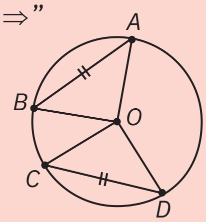
Proprietăți referitoare la coarde și arce în cerc

De reținut

Teorema 1 (referitoare la arce congruente cărora le corespund coarde congruente și reciproc)

Două coarde ale unui cerc sunt congruente dacă și numai dacă arcele subîntinse de cele două coarde sunt congruente.

„$\Rightarrow$”

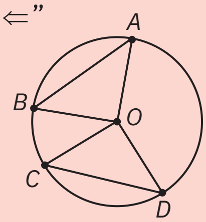


Ipoteză: $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$
$AB \equiv CD$

Concluzie: $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$

Demonstrație:
$\Delta AOB \equiv \Delta COD$ (L.L.L.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD \Rightarrow \overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$.

„$\Leftarrow$”



Ipoteză: $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$
$\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$

Concluzie: $AB \equiv CD$

Demonstrație:
$\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD} \Rightarrow \sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta AOB \equiv \Delta COD$ (L.U.L.) $\Rightarrow AB \equiv CD$.

Aplicație

Pe un cerc de centru O și rază $r = 4$ cm se consideră punctele A, B, C, D, în această ordine, astfel încât $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DO$ (Figura 4). Demonstrați că punctele A, O, D sunt coliniare și $AC \equiv BD$.

Demonstrație:

$AB \equiv BO \equiv AO \Rightarrow \Delta AOB$ este echilateral $\Rightarrow \sphericalangle AOB = 60°$.
$BC \equiv CO \equiv OB \Rightarrow \Delta BOC$ este echilateral $\Rightarrow \sphericalangle BOC = 60°$.
$CD \equiv DO \equiv CO \Rightarrow \Delta COD$ este echilateral $\Rightarrow \sphericalangle COD = 60°$.
Obținem $\sphericalangle AOD = 60° + 60° + 60° = 180°$, deci punctele A, O, D sunt coliniare.
Așadar, $\overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BCD}$, deci $AC \equiv BD$.

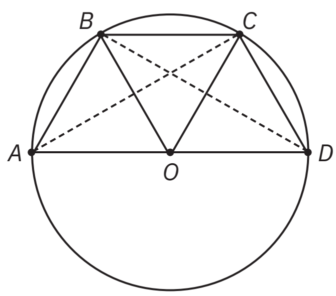


Figura 4

De reținut

Teorema 2 (referitoare la diametrul perpendicular pe o coardă)

Dacă A și B sunt două puncte pe un cerc, atunci diametrul perpendicular pe coarda AB conține mijlocul coardei AB și mijloacele arcelor $\overset{\frown}{AB}$ (arcul mic și arcul mare).

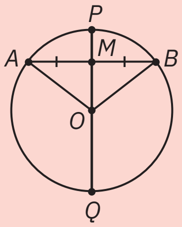


Figura 5

Ipoteză: $A, B \in \mathcal{C}(O, r)$
$OM \perp AB$, $M \in AB$
$OM \cap \mathcal{C}(O, r) = \{P, Q\}$

Concluzie: $AM = MB$
$\overset{\frown}{AP} \equiv \overset{\frown}{PB}$, $\overset{\frown}{AQ} \equiv \overset{\frown}{QB}$

Demonstrație:

În triunghiul isoscel OAB (cu $OA \equiv OB$ ca raze în cerc), OM este înălțime, deci este și mediană și bisectoarea unghiului AOB (Figura 5). Ca urmare, $AM \equiv MB$ și $\sphericalangle AOP \equiv \sphericalangle BOP$. Cum $\overset{\frown}{AP} = \sphericalangle AOP = \sphericalangle BOP = \overset{\frown}{PB}$, obținem $\overset{\frown}{AP} \equiv \overset{\frown}{PB}$.

Deoarece segmentul PQ este diametru, arcele $\overset{\frown}{PAQ}$ și $\overset{\frown}{PBQ}$ sunt semicercuri, deci sunt congruente. În consecință, $\overset{\frown}{AQ} \equiv \overset{\frown}{BQ}$, ca diferență de arce congruente.

Reciproca teoremei 2. Dacă un diametru al unui cerc împarte o coardă sau unul dintre arcele determinate de aceasta în părți congruente, atunci acest diametru este perpendicular pe coardă.

Aplicație

Pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$ se iau punctele A și B astfel încât $\overset{\frown}{AB} = 120°$. Fie M piciorul perpendicularei duse din O pe AB. Știind că $OM = 5$ cm, calculați lungimea razei cercului.

Demonstrație:

Fie P punctul de intersecție al dreptei OM cu arcul mic $\overset{\frown}{AB}$. Conform teoremei 2, arcele $\overset{\frown}{AP}$ și $\overset{\frown}{PB}$ sunt congruente, deci unghiurile la centru corespunzătoare $\sphericalangle AOP$ și $\sphericalangle BOP$ sunt, de asemenea, congruente. Ca urmare, $\sphericalangle AOP = \sphericalangle BOP = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle AOB = 60°$. Cum $OA = OP$ (ca raze în cerc), deducem că triunghiul OAP este echilateral. Deoarece $AM \perp OP$, rezultă că M este mijlocul segmentului OP, deci raza cercului este egală cu $OP = 2 \cdot OM = 10$ cm.

De reținut

Teorema 3 (referitoare la arce cuprinse între două coarde paralele)

Arcele și coardele cuprinse între două coarde paralele sunt respectiv congruente.

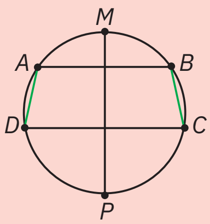


Figura 6

Ipoteză: $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$
$AB \parallel CD$
$C \notin \overset{\frown}{BAD}$

Concluzie: $AD \equiv BC$, $\overset{\frown}{AD} \equiv \overset{\frown}{BC}$

Demonstrație:

Construim, ca în Figura 6, diametrul MP perpendicular pe coarda AB, astfel încât M se află pe arcul $\overset{\frown}{CAD}$. Deoarece $AB \parallel CD$, deducem că diametrul MP este perpendicular și pe coarda CD.

Conform teoremei 2, punctul M este mijlocul arcului $\overset{\frown}{CAD}$, iar punctul P este mijlocul arcului $\overset{\frown}{CD}$. Deoarece arcele $\overset{\frown}{PAM}$ și $\overset{\frown}{PBM}$ sunt semicercuri, obținem $\overset{\frown}{AD} = 180° - \overset{\frown}{AM} - \overset{\frown}{PD} = 180° - \overset{\frown}{BM} - \overset{\frown}{PC} = \overset{\frown}{BC}$, deci arcele $\overset{\frown}{AD}$ și $\overset{\frown}{BC}$ sunt congruente. Din teorema 1, rezultă că $AD \equiv BC$.

Reciproca teoremei 3. Dacă A, B, C, D sunt puncte pe un cerc, în această ordine, astfel încât $AD \equiv BC$ sau $\overset{\frown}{AD} \equiv \overset{\frown}{BC}$, atunci $AB \parallel CD$.

Aplicație

Arătați că, dacă paralelogramul $ABCD$ are vârfurile pe un cerc, atunci el este dreptunghi.

Demonstrație:

Deoarece $ABCD$ este paralelogram, avem $AB \parallel CD$ și $AD \parallel BC$ (Figura 7).

Din teorema 3, cum $AB \parallel CD$ rezultă că $\overset{\frown}{AD} \equiv \overset{\frown}{BC}$, iar din $AD \parallel BC$ rezultă că $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$.

Atunci $\overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{ADC}$. Deducem că $\overset{\frown}{ABC}$ și $\overset{\frown}{ADC}$ sunt semicercuri, deci AC este diametru. Analog obținem că BD este diametru, deci $AC = BD$. Fiind un paralelogram cu diagonalele congruente, $ABCD$ este dreptunghi.

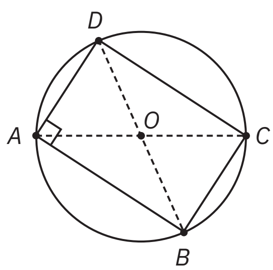


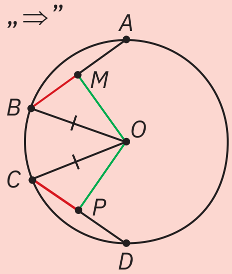
Figura 7

De reținut

Teorema 4 (referitoare la coarde egal depărtate de centru)

Două coarde ale unui cerc sunt congruente dacă și numai dacă sunt egal depărtate de centrul cercului.

„⇒”

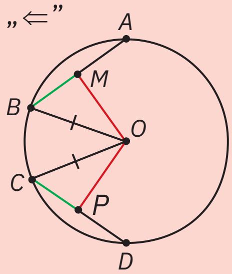


Ipoteză: $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$
$AB \equiv CD$
$OM \perp AB, M \in AB,$
$OP \perp CD, P \in CD$

Concluzie: $OM \equiv OP$

Demonstrație:
Din $OM \perp AB$, $OP \perp CD$, conform teoremei 2 rezultă că $BM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{CD}{2} = CP$.
Deoarece $OB = OC = r$, $BM = CP$ și $OM \perp AB$, $OP \perp CD$, deducem că $\Delta MOB \equiv \Delta POC$ (cazul I.C.), deci $OM \equiv OP$.

„⇐”



Ipoteză: $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$
$OM \perp AB, M \in AB,$
$OP \perp CD, P \in CD$
$OM \equiv OP$

Concluzie: $AB \equiv CD$

Demonstrație:
Deoarece $OB = OC = r$, $OM = OP$ și $OM \perp AB$, $OP \perp CD$, obținem $\Delta MOB \equiv \Delta POC$ (cazul I.C.), deci $MB \equiv CP$.
În continuare, conform teoremei 2, avem:
$AB = 2 \cdot BM = 2 \cdot CP = CD$.

Aplicație

Se consideră punctele A, B și C pe cercul de centru O și rază 10 cm. Dacă $AB = AC$ și $\sphericalangle BAC = 60°$, calculați distanța de la punctul O la dreapta AB.

Demonstrație:
Construim $OM \perp AB$, $M \in AB$, și $OP \perp AC$, $P \in AC$. Conform teoremei 4, rezultă că $OM \equiv OP$. Atunci $\Delta AOM \equiv \Delta AOP$ (cazul de congruență I.C.), de unde $\sphericalangle OAM \equiv \sphericalangle OAP$, deci $\sphericalangle OAM = 30°$ (Figura 8). Aplicând în triunghiul dreptunghic AOM proprietatea unghiului cu măsura de 30°, rezultă că $d(O, AB) = OM = \dfrac{AO}{2} = 5\text{ cm}$.

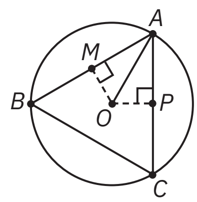


Figura 8

Observații

1. Dacă un trapez are vârfurile pe un cerc, atunci trapezul este isoscel.
Demonstrație:
Fie $ABCD$ un trapez cu vârfurile pe un cerc și $AB \parallel CD$. Conform teoremei 3, arcele cuprinse între dreptele paralele AB și CD sunt congruente, adică $\overset{\frown}{AD} \equiv \overset{\frown}{BC}$ și, cum la arce congruente corespund coarde congruente (teorema 1), obținem că $AD \equiv BC$, adică trapezul $ABCD$ este isoscel.
2. Dacă un romb are vârfurile pe un cerc, atunci rombul este pătrat.
Demonstrație:
Am demonstrat anterior că un paralelogram cu vârfurile pe un cerc este dreptunghi. Așadar, un romb cu vârfurile pe un cerc este și dreptunghi, deci un astfel de romb este pătrat.

Portofoliu

1. Utilizând un motor de căutare pe Internet, identificați patru logouri care utilizează cercul.
2. Scrieți și demonstrați reciprocele teoremelor 2 și 3, enunțate în această lecție.
Adunați aceste pagini în portofoliul **Geometria cercului**.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. În Figura 9, $BC \parallel OE$. Demonstrați că $\overset{\frown}{BD} = 2 \cdot \overset{\frown}{CE}$.

Rezolvare:
Fie $EO \cap \mathcal{C}(O, r) = \{M, E\}$. Deoarece $BC \parallel ME$ rezultă că $\overset{\frown}{BM} \equiv \overset{\frown}{CE}$ conform teoremei 3 (1).
În plus, se observă că $\sphericalangle MOD \equiv \sphericalangle EOC$ (unghiuri opuse la vârf), deci $\overset{\frown}{DM} \equiv \overset{\frown}{CE}$ (2).
Din (1) și (2) obținem $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{BM} + \overset{\frown}{MD} = 2 \cdot \overset{\frown}{CE}$.

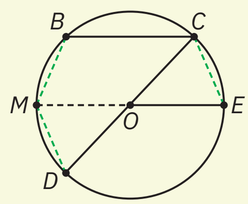


Figura 9

2. Se consideră cercul de centru O, ca în Figura 10, și coardele congruente BC și FG. Dacă $OA \perp BC$, $A \in BC$, $OH \perp FG$, $H \in FG$, și $OA = 5x + 11$ cm, $OH = 3x + 19$ cm, atunci calculați lungimea segmentului OA.

Rezolvare:
Cum $BC \equiv FG$, din teorema 4 rezultă că $OA \equiv OH$.
Obținem $5x + 11 = 3x + 19$, așadar $x = 4$ cm, deci $OA = 5 \cdot 4 + 11 = 31$ cm.

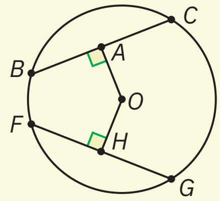
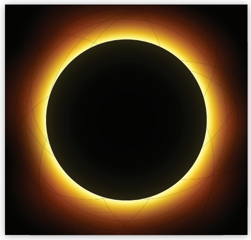


Figura 10

Probleme propuse

1. O eclipsă de Soare se produce atunci când Luna trece, între Pământ și Soare, prin fața Soarelui. Când discul Lunii acoperă în întregime discul Soarelui, imaginea luminoasă a Soarelui este acoperită complet și, pentru o anumită zonă de observație și o anumită durată, de ordinul câtorva minute, eclipsa de Soare este *totală*, ca în imaginea alăturată. Dați și alte exemple de obiecte din viața cotidiană în care apar cercuri și discuri.



2. În Figura 11 sunt reprezentate cercul de centru O și rază r și punctele M, N, P, Q, S și T. Calculați probabilitatea ca, alegând un punct dintre cele reprezentate, acesta să fie:
a. în interiorul cercului de centru O și rază r; **b.** pe cercul de centru O și rază r;
c. pe discul de centru O și rază r; **d.** în exteriorul cercului de centru O și rază r.

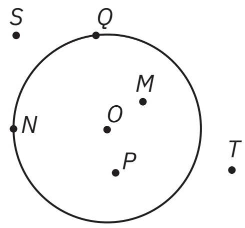


Figura 11

3. Pe un cerc de centru O și rază r se iau MP și NQ două diametre.
a. Demonstrați că $NP \equiv MQ$. **b.** Dacă $NP \equiv OP$, calculați măsura unghiului PMN.

4. Pe un cerc de centru O se iau punctele A, B, C, astfel încât $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{BC} \equiv \overset{\frown}{CA}$. Determinați măsura unghiului AOB.

5. Pe un cerc se consideră punctele A, B, C și D, în această ordine, astfel încât $\overset{\frown}{AB} = 60°$, $\overset{\frown}{AC} = 80°$ și $\overset{\frown}{DC} = 120°$. Calculați măsura arcelor $\overset{\frown}{AD}$ și $\overset{\frown}{BC}$.

6. Se consideră punctele A, C, D și B, în această ordine, pe un cerc de centru O și rază r. Dacă A, O, B sunt coliniare, $\overset{\frown}{AD} = 130°$ și $\overset{\frown}{CD} = 80°$, atunci demonstrați că $AC \equiv DB$ și $AD \equiv BC$.

7. În interiorul unui cerc de centru O și rază r, se ia un punct A, $A \neq O$. Construiți două puncte B și C pe cercul de centru O și rază r, astfel încât patrulaterul $OBAC$ să fie romb.

8. Pe un cerc de centru O și rază r se iau punctele A, B și C, astfel încât triunghiul ABC nu este isoscel. Construiți două coarde CP și CQ astfel încât $PC \equiv CQ \equiv AB$.

9. Pe un cerc de centru O și rază r se consideră punctele A, B și C, astfel încât $AB \equiv AC$. Dacă punctul M este mijlocul segmentului BC, demonstrați că punctele A, O și M sunt coliniare.

10. În cercul de centru O și rază r se consideră un diametru AB. Punctele C, D, E se află, în această ordine, pe unul dintre semicercurile determinate de diametrul AB, astfel încât arcele AC, CD, DE și EB sunt congruente. Arătați că patrulaterul $CEQP$ este pătrat, unde P și Q sunt pe cerc, astfel încât CQ și EP sunt diametre.

11. Pe un cerc de centru O și rază r, considerăm punctele A, B, P, Q și D astfel încât $\sphericalangle POQ = 40°$, $\sphericalangle AOB = 80°$ și semidreapta OD este bisectoarea unghiului AOB. Demonstrați că $AD \equiv PQ$.

12. Pe cercul de centru O și rază 12 cm, se consideră punctele A, B, C astfel încât $AB \equiv AC$ și $\sphericalangle BAC = 90°$. Dacă $OP \perp AB$, $P \in AB$, $OQ \perp AC$, $Q \in AC$, atunci calculați aria patrulaterului $APOQ$.

Minitest

1. Distanțele de la centrul unui cerc la două coarde paralele sunt 4 cm și 6 cm. Calculați distanța dintre mijloacele celor două coarde. Câte situații există? **(3p)**

2. Demonstrați că mijloacele a cinci coarde congruente ale unui cerc se află pe un cerc. **(3p)**

3. Într-un cerc de centru O și rază 10 cm, se consideră o coardă AB și diametrul CD, astfel încât $AB \perp CD$ și $\overset{\frown}{AC} = 60°$. Calculați lungimea coardei AC și distanța de la punctul C la coarda AB. **(3p)**

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Lecția 2: Unghi înscris în cerc

Cuvinte-cheie

unghi înscris în cerc | punct exterior cercului | punct interior cercului

De reținut

Un unghi cu vârful pe un cerc se numește *unghi înscris în cerc* dacă laturile sale conțin coarde ale cercului.

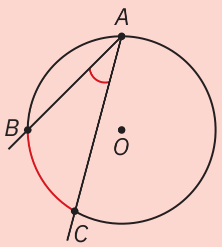


Figura 1

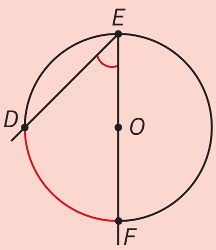


Figura 2

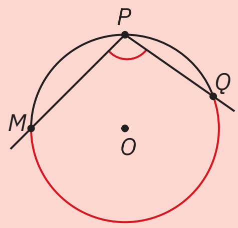


Figura 3

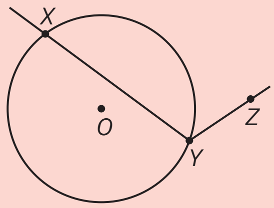


Figura 4

În Figura 1, unghiul BAC este înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Spunem că unghiul BAC *subîntinde* arcul $\overset{\frown}{BC}$ sau că arcul $\overset{\frown}{BC}$ este *cuprins între laturile* unghiului BAC. Unghiul înscris DEF din Figura 2 subîntinde arcul $\overset{\frown}{DF}$, iar unghiul înscris MPQ din Figura 3 subîntinde arcul $\overset{\frown}{MQ}$. Unghiul XYZ din Figura 4 nu este unghi înscris.

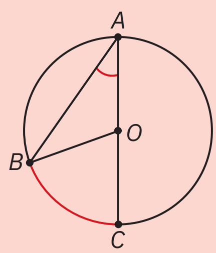
De reținut

Teoremă. Măsura unui unghi înscris într-un cerc este egală cu jumătate din măsura arcului de cerc cuprins între laturile sale.

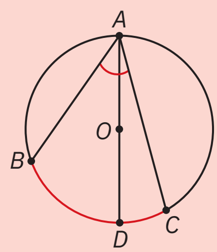
Demonstrație:

Fie $A, B, C \in \mathcal{C}(O, r)$. Demonstrăm că $\sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{BC}$.

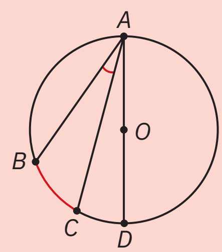
Analizăm trei cazuri, în funcție de poziția centrului cercului O față de unghiul BAC, ca în figurile următoare:



Cazul I



Cazul al II-lea



Cazul al III-lea

Cazul I: *Centrul cercului aparține uneia dintre laturile unghiului BAC.*

Unghiul BOC este exterior triunghiului isoscel AOB cu baza AB, deci $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAO = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BOC$. Deoarece BOC este unghi la centru, rezultă că $\sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BOC = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{BC}$.

Cazul al II-lea: *Centrul cercului aparține interiorului unghiului BAC.*

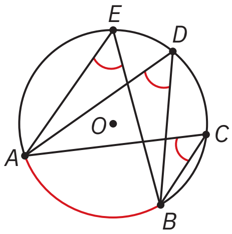
Fie $AO \cap \mathcal{C}(O, r) = \{A, D\}$. Conform cazului I, obținem: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD + \sphericalangle DAC = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{BD} + \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{CD} = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{BC}$.

Cazul al III-lea: *Centrul cercului aparține exteriorului unghiului BAC.*

Fie $AO \cap \mathcal{C}(O, r) = \{A, D\}$. Conform cazului I, obținem: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD - \sphericalangle DAC = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{BD} - \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{CD} = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{BC}$.

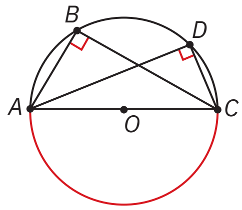
Observații

1. *Unghiurile înscrise în cerc care subîntind același arc sunt congruente.*



$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = \sphericalangle AEB = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{AB}$

2. *Orice unghi înscris într-un semicerc este un unghi drept.*

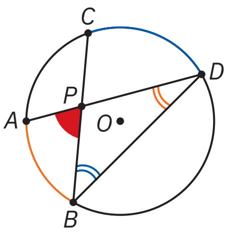


$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = \overset{\frown}{AC} : 2 = 180° : 2 = 90°$

Portofoliu

Demonstrați proprietățile următoare, apoi scrieți-le și adunați aceste pagini în portofoliul **Geometria cercului**:

1. Măsura unui unghi cu vârful în interiorul cercului este egală cu semisuma măsurilor arcelor determinate pe cerc de laturile unghiului și prelungirile acestora.

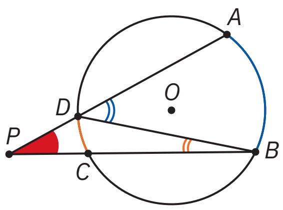


Ipoteză: $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$
$P \in \text{Int}(\mathcal{C}(O, r))$
$AD \cap BC = \{P\}$

Concluzie: $\sphericalangle APB = \frac{1}{2} \cdot (\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD})$

Indicație: Unghiurile *ADB* și *CBD* sunt înscrise în cerc, iar unghiul *APB* este exterior triunghiului *BDP*.

2. Măsura unui unghi cu vârful în exteriorul cercului este egală cu valoarea absolută a semidiferenței măsurilor arcelor determinate pe cerc de laturile unghiului.

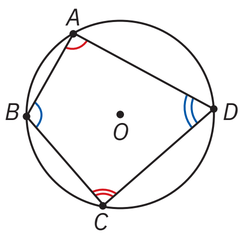


Ipoteză: $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$
$P \in \text{Ext}(\mathcal{C}(O, r))$
$AD \cap BC = \{P\}$

Concluzie: $\sphericalangle APB = \frac{1}{2} \cdot (\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD})$

Indicație: Unghiurile *ADB* și *CBD* sunt înscrise în cerc, iar unghiul *ADB* este exterior triunghiului *BDP*.

3. Suma măsurilor unghiurilor opuse ale unui patrulater cu toate vârfurile pe un cerc este egală cu 180°.



Ipoteză: *ABCD* patrulater convex
$A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$

Concluzie: $\sphericalangle A + \sphericalangle C = \sphericalangle B + \sphericalangle D = 180°$

Indicație: Unghiurile *BAD* și *BCD* sunt înscrise în cerc, la fel și unghiurile *ABC* și *ADC*.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$ se consideră punctele *A*, *B*, *C* și *D*.
   a. Dacă $\sphericalangle ACB = 73°$, determinați măsura unghiului *AOB*.
   b. Dacă $\overset{\frown}{BC} = 36°$, calculați măsurile unghiurilor *BOC* și *BAC*.
   c. Dacă $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC = 84°$, demonstrați că segmentele *AC* și *BD* nu au puncte comune.

Rezolvare:

a. $\overset{\frown}{AB} = 2 \cdot \sphericalangle ACB = 146° = \sphericalangle AOB$.

b. Dacă A se află pe arcul mare $\overset{\frown}{BC}$, atunci $\sphericalangle BOC = \overset{\frown}{BC} = 36°$, iar $\sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{BC} = 18°$.

Dacă A se află pe arcul mic $\overset{\frown}{BC}$, atunci $\sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \cdot (360° - 36°) = 162°$.

c. Dacă D se află pe arcul $\overset{\frown}{ABC}$, atunci segmentele AC și BD nu sunt concurente, iar unghiurile ADC și ABC subîntind arcul mic $\overset{\frown}{AC}$, deci $\sphericalangle ADC = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{AC} = \sphericalangle ABC = 84°$.

Presupunem prin absurd că există un punct D pe cerc, astfel încât $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC = 84°$, iar segmentele AC și BD se intersectează, deci B și D sunt de o parte și de alta a dreptei AC. Atunci patrulaterul $ABCD$ are toate vârfurile pe $\mathcal{C}(O, r)$ și rezultă că $168° = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = \overset{\frown}{ADC} : 2 + \overset{\frown}{ABC} : 2 = 180°$, fals.

Așadar D se află pe arcul $\overset{\frown}{ABC}$, iar segmentele AC și BD nu sunt concurente.

2. Pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$ se consideră punctele A, B și C, astfel încât măsurile arcelor mici $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ și $\overset{\frown}{BC}$ sunt direct proporționale cu numerele 6, 8 și 10. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC și demonstrați că $\sphericalangle ATC \equiv \sphericalangle ABC$, unde punctul T este intersecția dintre dreapta AO și arcul mic $\overset{\frown}{BC}$.

Rezolvare:
Din ipoteză, există $k > 0$, astfel încât $\overset{\frown}{AB} = 6k°$, $\overset{\frown}{AC} = 8k°$ și $\overset{\frown}{BC} = 10k°$.

Deoarece $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} > \overset{\frown}{AC}$, rezultă că $\overset{\frown}{ABC} > 180°$, deci arcul mic $\overset{\frown}{AC}$ nu conține punctul B.

Rezultă că $24k° = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AC} = 360°$, deci $k = 15$. Așadar $\overset{\frown}{AB} = 90°$, $\overset{\frown}{AC} = 120°$ și $\overset{\frown}{BC} = 150°$.

Obținem $\sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{BC} = 75°$, $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{AC} = 60°$ și $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{AB} = 45°$.

Unghiurile ATC și ABC subîntind arcul mic $\overset{\frown}{AC}$, iar $\sphericalangle ATC = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{AC} = 60° = \sphericalangle ABC$.

Probleme propuse

1. Se consideră triunghiul ABC înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$, astfel încât centrul O se află în interiorul triunghiului. Precizați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a. Unghiul AOB este unghi înscris în $\mathcal{C}(O, r)$.

b. Unghiul ABC este unghi înscris în $\mathcal{C}(O, r)$.

c. Unghiul CAB nu este unghi înscris în $\mathcal{C}(O, r)$.

d. Unghiul OBC nu este unghi înscris în $\mathcal{C}(O, r)$.

2. Desenați un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ și alegeți punctele A, B, C, D pe cerc, astfel încât B și D să fie diametral opuse. Completați spațiile punctate, pentru a obține propoziții adevărate:

a. Unghiul AO... nu este unghi înscris în $\mathcal{C}(O, r)$.

b. Unghiurile OB... și OB... sunt înscrise în cerc.

c. Unghiurile BA... și BA... sunt înscrise în cerc.

d. Unghiurile DA... și BC... sunt congruente.

3. Determinați valoarea lui x, în fiecare dintre cazurile reprezentate în figurile 5, 6 și 7:

a.

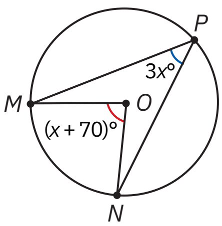


Figura 5

b.

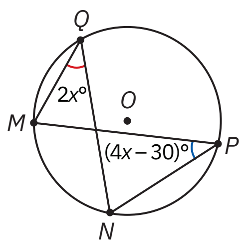


Figura 6

c.

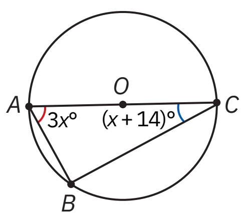


Figura 7

4. Punctele A, B, C și D, în această ordine, sunt pe $\mathcal{C}(O, r)$. Dacă $\overset{\frown}{AB} = 80°$, $\overset{\frown}{CD} = 60°$ și $\overset{\frown}{DA} = 120°$, calculați măsurile unghiurilor ABD, ABC, BAC, CDA, CDB și ACB și demonstrați că punctele A, O și C sunt coliniare.

5. Punctele A, B, C și D se află pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Dacă AB și CD sunt diametre perpendiculare, iar punctul P se află pe arcul mic $\overset{\frown}{AC}$, cu $\overset{\frown}{AP} = 20°$, calculați măsurile unghiurilor CPD, PCD, CPB, DPB, PBA și APD.

6. Fie punctele A, B și C pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$, astfel încât măsurile arcelor $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ și $\overset{\frown}{BC}$ sunt direct proporționale cu numerele 9, 12 și 15. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

7. În Figura 8, arcele $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DE}$, $\overset{\frown}{EF}$, $\overset{\frown}{FG}$, $\overset{\frown}{GH}$ și $\overset{\frown}{HA}$ sunt congruente.
   a. Calculați măsurile arcelor $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{AD}$ și $\overset{\frown}{AE}$.
   b. Calculați măsurile unghiurilor marcate pe figură.
   c. Demonstrați că $AD = DG = GB = BE = EH = HC = CF = FA$.

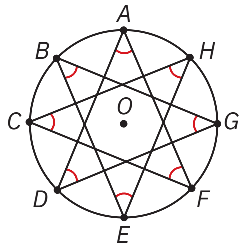


Figura 8

8. Patrulaterul $ABCD$ are toate vârfurile pe un cerc, iar $AB \perp AD$ și $AC \perp BD$. Demonstrați că:
   a. $AD = CD$;
   b. $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ADB$.

9. Punctele A, B și C se află pe un cerc, astfel încât $\overset{\frown}{AB} = 46°$ și $\overset{\frown}{BC} = 134°$. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC. Câte soluții are problema?

10. Punctele A, B, C și D se află pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$, astfel încât A și B sunt diametral opuse, semidreapta OC este bisectoarea unghiului DOB, iar semidreapta OD este bisectoarea unghiului AOC.
   a. Dacă $CD = 4$ cm, determinați lungimea razei cercului.
   b. Determinați măsura unghiului BAC.
   c. Dacă M și N sunt intersecțiile mediatoarei segmentului CD cu cercul $\mathcal{C}(O, r)$, calculați $\sphericalangle CDM + \sphericalangle DCN$.

11. Se consideră triunghiul ABC, înscris în $\mathcal{C}(O, r)$, cu $\sphericalangle A = 72°$ și $\sphericalangle B = 48°$. Fie $A', B', C' \in \mathcal{C}(O, r)$, astfel încât dreptele AA', BB' și CC' sunt înălțimile triunghiului ABC. Determinați măsurile arcelor mici $\overset{\frown}{BA'}$, $\overset{\frown}{CB'}$, $\overset{\frown}{AC'}$, $\overset{\frown}{A'B'}$, $\overset{\frown}{B'C'}$ și $\overset{\frown}{C'A'}$.

12. Se consideră punctele A, B, C, D pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$, astfel încât BC este mediatoarea segmentului OA, iar $CD \parallel OA$. Fie M mijlocul razei OD și punctul E, cu $CM \cap \mathcal{C}(O, r) = \{C, E\}$.
   a. Demonstrați că punctele B, O și D sunt coliniare.
   b. Determinați măsura unghiului CAD.
   c. Demonstrați că punctele A, O și E sunt coliniare.

Minitest

1. Punctele A, B și C se află pe $\mathcal{C}(O, r)$, astfel încât $\overset{\frown}{AB} = 120°$. Determinați măsura unghiurilor AOB și ACB. Câte soluții există? **(3p)**

2. Punctele A, B, C și D, în această ordine, se află pe un cerc, astfel încât $\overset{\frown}{AB} = 60°$ și $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DA} = 100°$. Determinați măsurile unghiurilor ABD, BCD și ADC. **(3p)**

3. Patrulaterul $ABCD$ are toate vârfurile pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Dacă $\sphericalangle ACB = 32°$ și $\sphericalangle ABD = 58°$, demonstrați că BD este diametru. **(3p)**

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Lecția 3: Tangente la cerc

Cuvinte-cheie

tangentă | punct de tangență | secantă | dreaptă exterioară cercului

De reținut

Ne reamintim din clasa a șasea că o dreaptă și un cerc pot avea cel mult două puncte comune:

- o dreaptă care nu are niciun punct comun cu un cerc este *exterioară cercului*;
- o dreaptă care are două puncte comune cu un cerc este *secantă la cerc*;
- o dreaptă care are un singur punct comun cu un cerc este *tangentă* la cerc, iar punctul de intersecție dintre dreaptă și cerc se numește *punct de tangență*.

În Figura 1, dreapta d este exterioară cercului, dreapta g este secantă la cerc, iar dreapta h este tangenta în punctul T la cerc.

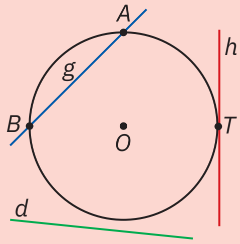


Figura 1

Teorema 1. Tangenta la un cerc este perpendiculară pe raza cercului care conține punctul de tangență.

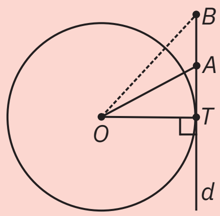


Figura 2

Ipoteză: $d \cap \mathcal{C}(O, r) = \{T\}$

Concluzie: $d \perp OT$

Demonstrație:
Prin absurd, presupunem că d nu este perpendiculară pe OT. Fie $A, B \in d$ astfel încât $d \perp OA$ și $AB = AT$. Triunghiurile AOT și AOB sunt congruente (C.C.), așadar $OB = OT = r$, deci dreapta d este secantă la cerc, fals. În consecință, $d \perp OT$.

Observație. Are loc și reciproca Teoremei 1:
Dacă T este un punct pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$, atunci perpendiculara în T pe dreapta OT este tangentă la cerc.

Teorema 2. Printr-un punct exterior unui cerc se pot construi exact două tangente la acest cerc.

Demonstrație:
Fie M un punct exterior cercului $\mathcal{C}(O, r)$ și T un punct pe cerc astfel încât MT este tangentă la cerc. Din Teorema 1 rezultă că $MT \perp OT$, deci $\sphericalangle MTO = 90°$, adică T se află pe cercul $\mathcal{C}'$ de diametru OM. Cercurile $\mathcal{C}(O, r)$ și $\mathcal{C}'$ sunt secante; punctele lor de intersecție, T_1 și T_2, sunt cele două puncte de tangență căutate, iar tangentele din M la cerc sunt dreptele MT_1 și MT_2.

Teorema 3. Segmentele determinate de punctele de tangență pe tangentele la un cerc duse dintr-un punct exterior cercului sunt congruente.

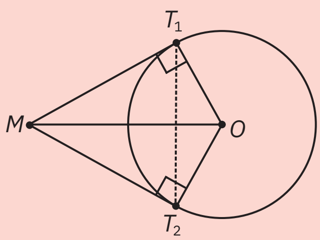


Figura 3

Ipoteză: $M \in \text{Ext}\,\mathcal{C}(O, r)$, $T_1, T_2 \in \mathcal{C}(O, r)$
MT_1, MT_2 tangente la $\mathcal{C}(O, r)$

Concluzie: $MT_1 = MT_2$

Demonstrație:
Din Teorema 1 rezultă că $MT_1 \perp OT_1$ și $MT_2 \perp OT_2$, deci $\sphericalangle OT_1M = \sphericalangle OT_2M = 90°$. Rezultă că $\Delta OMT_1 \equiv \Delta OMT_2$ (I.C.), deci $MT_1 = MT_2$.

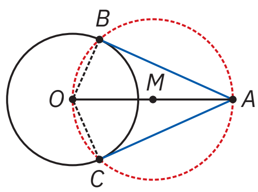
Observație (proprietățile „ciocului de cioară”)

Fie M un punct exterior cercului $\mathcal{C}(O, r)$ și MT_1, MT_2 tangentele duse prin M la cerc, unde $T_1, T_2 \in \mathcal{C}(O, r)$ (ca în Figura 3). Folosind congruența triunghiurilor OMT_1 și OMT_2 se deduce că:

a. $MT_1 = MT_2$;
b. semidreapta MO este bisectoarea unghiului T_1MT_2;
c. dreapta MO este mediatoarea segmentului T_1T_2;
d. semidreapta OM este bisectoarea unghiului T_1OT_2.

Portofoliu

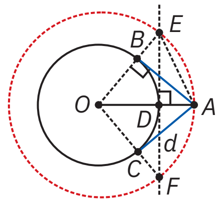
Scrieți în paginile portofoliului **Geometria cercului** următoarele două modalități de construcție a tangentelor dintr-un punct exterior A la cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Realizați efectiv construcția acestor tangente și justificați fiecare metodă.



1. a. Construim mijlocul M al segmentului OA.

b. Construim cercul de centru M și rază MO.

c. Notăm cu B și C punctele în care se intersectează cercurile $\mathcal{C}(O, r)$ și $\mathcal{C}(M, MO)$. Tangentele din A la cercul $\mathcal{C}(O, r)$ sunt dreptele AB și AC.



2. a. Prin punctul D, în care segmentul OA intersectează cercul $\mathcal{C}(O, r)$, construim dreapta d, perpendiculară pe OA.

b. Construim cercul $\mathcal{C}(O, OA)$ și notăm $d \cap \mathcal{C}(O, OA) = \{E, F\}$.

c. Notăm cu B și C intersecțiile segmentelor OE și OF cu $\mathcal{C}(O, r)$. Tangentele din A la cercul $\mathcal{C}(O, r)$ sunt dreptele AB și AC.

Aplicația 1 (unghiul format de o tangentă la cerc cu o secantă)

Fie unghiul BAC cu vârful A pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$ și latura AC o coardă a acestui cerc.

a. Dacă dreapta AB este tangentă la cercul $\mathcal{C}(O, r)$, atunci măsura unghiului BAC este egală cu jumătate din măsura arcului $\overset{\frown}{AC}$ aflat în interiorul unghiului.

b. Reciproc, dacă măsura unghiului BAC este egală cu jumătate din măsura arcului $\overset{\frown}{AC}$ din interiorul unghiului, atunci dreapta AB este tangentă la cercul $\mathcal{C}(O, r)$.

Demonstrație:

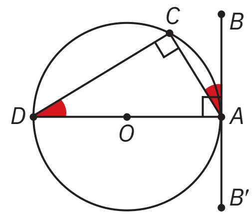


Figura 4

a. Vom analiza trei cazuri, în funcție de măsura unghiului BAC.

I. Pentru început, vom considera că unghiul BAC este ascuțit, ca în Figura 4. Notăm cu D punctul diametral opus lui A. Cum $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BAD = 90°$, unghiurile ADC și BAC au același complement (unghiul CAD), deci $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ADC = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{AC}$.

II. Deoarece $\sphericalangle BAD = 90° = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{ACD}$, proprietatea este adevărată și pentru unghiuri drepte.

III. Fie $B' \in AB$, astfel încât A se află pe segmentul BB'. Unghiul $B'AC$ este obtuz și subîntinde arcul $\overset{\frown}{ADC}$, iar $\sphericalangle B'AC = 180° - \sphericalangle BAC = 180° - \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} = \frac{1}{2}(360° - \overset{\frown}{AC}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ADC}$.

b. Presupunem prin absurd că AB nu este tangentă la cerc. Fie d tangenta în A la cerc și E un punct pe aceasta, de aceeași parte ca B față de dreapta AD. Din **a** rezultă că $\sphericalangle EAC = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{AC} = \sphericalangle BAC$, deci semidreptele AB și AE coincid, fals. Așadar presupunerea este falsă, deci AB este tangentă la cerc.

Observație. Punctul **b** al Aplicației 1 poate fi folosit pentru a arăta că o dreaptă este tangentă la un cerc.

Aplicația 2 (Teorema lui Pitot)

Dacă toate laturile patrulaterului $ABCD$ sunt tangente la cercul $\mathcal{C}(O, r)$, atunci $AB + CD = AD + BC$.

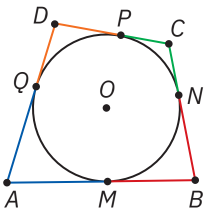


Figura 5

Demonstrație:

Fie M, N, P, Q punctele de tangență ale laturilor AB, BC, CD și DA cu cercul $\mathcal{C}(O, r)$, ca în Figura 5. Deoarece AM și AQ sunt tangente la cerc, rezultă că $AM = AQ$. Analog obținem $BM = BN$, $CN = CP$ și $DP = DQ$. În consecință, rezultă:

$$AB + CD = (AM + BM) + (CP + DP) = AQ + BN + CN + DQ = (AQ + DQ) + (BN + CN) = AD + BC.$$

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Tangentele dintr-un punct exterior M la un cerc de centru O formează între ele un unghi cu măsura de $90°$. Dacă $OM = 4\sqrt{2}$ cm, determinați raza cercului.

Rezolvare:
Fie A și B punctele de tangență. Deoarece $\sphericalangle OAM = \sphericalangle OBM = \sphericalangle AMB = 90°$ și $OA = OB$, rezultă că $OAMB$ este pătrat. Obținem $r = OA = 4$ cm.

2. Laturile AB, BC și CA ale triunghiului ABC din Figura 6 sunt tangente în D, E, respectiv F la cercul de centru O și rază r. Dacă $AD = 8$ cm, $BE = 6$ cm și $CF = 4$ cm, calculați perimetrul triunghiului ABC.

Rezolvare:
AD și AF sunt tangentele din A la cerc, deci $AF = AD = 8$ cm. Analog rezultă că $BD = BE = 6$ cm și $CE = CF = 4$ cm. Obținem $AB = 14$ cm, $BC = 10$ cm și $CA = 12$ cm. Perimetrul triunghiului ABC este $\mathcal{P}_{ABC} = 36$ cm.

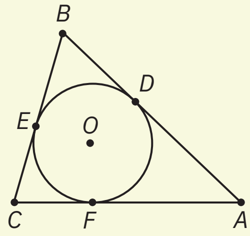


Figura 6

Probleme propuse

1. Construiți un cerc de centru O și rază 4 cm. Construiți trei drepte a, b și c, astfel încât:
   a. dreapta a să fie tangentă la cerc;
   b. dreapta b să fie exterioară cercului;
   c. dreapta c să fie secantă la cerc.
2. Desenați un cerc de centru O și rază 5 cm. Construiți tangentele dintr-un punct exterior A la cerc.
3. Se consideră $A \in \mathcal{C}(O, 10 \text{ cm})$ și dreapta MA tangentă la cerc. Calculați:
   a. lungimea segmentului MA, știind că $\sphericalangle AMO = 45°$;
   b. lungimea segmentului OM, știind că $\sphericalangle AMO = 30°$.
4. Pe cercul $\mathcal{C}(O, 24 \text{ cm})$ se consideră un punct P. Se construiește tangenta la cerc prin P, pe care se iau punctele A și B, astfel încât $AP = PB$. Știind că $AP = 48$ cm, calculați aria triunghiului AOB.
5. Pe tangenta în M la cercul $\mathcal{C}(O, r)$ fie punctele A și B, simetrice față de M. Segmentele OA și OB intersectează cercul în C, respectiv D. Dacă $\sphericalangle AOB = 120°$, demonstrați că:
   a. $CD \parallel AB$;
   b. $DOCM$ este romb.
6. Pe cercul $\mathcal{C}(O, 2 \text{ cm})$ se aleg punctele M și N, astfel încât $\overset{\frown}{MN} = 240°$. Fie P punctul de intersecție dintre tangentele în M și N la cerc.
   a. Determinați lungimea segmentului OP.
   b. Demonstrați că triunghiul MNP este echilateral.
7. Fie $A \in \mathcal{C}(O, 4 \text{ cm})$ și două puncte B, C din plan, cu $OB = 3$ cm, $OC = 5$ cm, $AC = 3$ cm și $\sphericalangle AOB = 90°$.
   a. Precizați poziția fiecăreia dintre dreptele AB, BC și AC față de cerc.
   b. Determinați lungimea segmentului BC. Câte soluții există?
8. Pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$ se consideră punctele A, B, C, astfel încât $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB} = 40°$. Demonstrați că tangenta în C la cerc este paralelă cu dreapta AB.
9. Pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$ se consideră punctele M, N, P, în această ordine, astfel încât $\overset{\frown}{MP} = 84°$ și tangenta în N la cerc este paralelă cu dreapta MP. Determinați măsura arcului $\overset{\frown}{MN}$.
10. Cercurile $\mathcal{C}(O, r)$ și $\mathcal{C}(Q, r')$ se intersectează în punctele A și B. Demonstrați că:
    a. $OQ \perp AB$;
    b. dacă OA este tangentă la cercul $\mathcal{C}(Q, r')$, atunci și OB este tangentă la cercul $\mathcal{C}(Q, r')$.
11. Fie P un punct exterior cercului $\mathcal{C}(O, r)$ și punctele $A, B \in \mathcal{C}(O, r)$, astfel încât PA și PB sunt tangente la cerc. Dacă $\sphericalangle APB = 60°$ și $PO \cap \mathcal{C}(O, r) = \{S, M\}$, cu S între M și P, demonstrați că:
    a. triunghiul ABM este echilateral;
    b. triunghiul MAP este isoscel;
    c. patrulaterul $OASB$ este romb.

12. Fie D, E, F punctele de tangență ale cercului înscris în triunghiul ABC cu laturile BC, CA, respectiv AB. Dacă $\sphericalangle EDF = 60°$ și $\sphericalangle DEF = 80°$, determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

13. Fie D, E, F punctele de tangență ale cercului înscris în triunghiul ABC cu laturile BC, CA, respectiv AB. Dacă $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ și $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, demonstrați că $AF = p - a$, $BD = p - b$ și $CE = p - c$ (lungimile segmentelor sunt exprimate în aceeași unitate de măsură).

14. Pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$ se consideră punctele A, B, C, astfel încât AB este diametru. Tangenta în C la cerc intersectează tangentele în A și B la cerc în punctele D, respectiv E. Fie $AC \cap OD = \{F\}$ și $BC \cap OE = \{G\}$. Demonstrați că:

a. $DE = AD + BE$; **b.** $\sphericalangle DOE = 90°$; **c.** $OFCG$ este dreptunghi.

15. O curea de distribuție este întinsă pe două roți circulare pe care le intersectează pe lungimile arcelor $\overset{\frown}{A_1C_1B_1}$ și $\overset{\frown}{A_2C_2B_2}$, ca în Figura 7. Arătați că $\overset{\frown}{A_1C_1B_1} + \overset{\frown}{A_2C_2B_2} = 360°$.

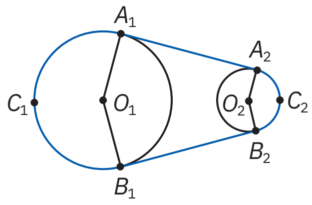


Figura 7

Minitest

1. Tangentele dintr-un punct exterior A la un cerc de centru O și rază 8 cm formează între ele un unghi cu măsura de 60°. Calculați lungimea segmentului AO. **(3p)**

2. Fie $A, B, C \in \mathcal{C}(O, r)$ și T un punct exterior cercului. Dacă $\overset{\frown}{ACB} = 144°$ și dreptele AT și BT sunt tangente la cerc, determinați măsura unghiului ATB. **(3p)**

3. Fie cercul $\mathcal{C}(O, 2\text{ cm})$ și punctele $A \in \operatorname{Ext}\mathcal{C}(O, 2\text{ cm})$ și $B \in \mathcal{C}(O, 2\text{ cm})$, astfel încât AB este tangentă la cerc, $BO \cap \mathcal{C}(O, 2\text{ cm}) = \{B, C\}$ și $AC \cap \mathcal{C}(O, 2\text{ cm}) = \{C, T\}$. Dacă $OT \parallel AB$, calculați lungimea coardei BT. **(3p)**

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Lecția 4: Poligoane regulate înscrise într-un cerc

Cuvinte-cheie

poligon regulat | poligon înscris în cerc | cerc circumscris | triunghi echilateral | pătrat | hexagon regulat

Poligoane regulate înscrise într-un cerc

Un poligon se numește *înscris într-un cerc* dacă vârfurile poligonului aparțin cercului. În acest caz spunem că cercul este *circumscris* poligonului.

De reținut

Definiție. Un poligon convex cu toate laturile congruente și toate unghiurile congruente se numește *poligon regulat*.

Exemple: Triunghiul echilateral (Figura 1) și pătratul (Figura 2) sunt poligoane regulate.

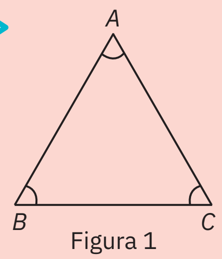


Figura 1

$AB = AC = BC$
$\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60°$

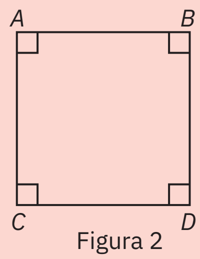


Figura 2

$ABCD$ pătrat
$AB = BC = CD = DA$
$\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90°$

Teoremă. Orice poligon regulat se poate înscrie într-un cerc.

Folosind faptul că la arce congruente corespund coarde congruente, se poate demonstra că:

a. Un poligon care are toate laturile congruente și este înscris într-un cerc este poligon regulat.
b. Un poligon care are toate unghiurile congruente și este înscris într-un cerc este poligon regulat.

Observații

1. Măsura fiecărui unghi al unui poligon regulat cu n laturi ($n \geq 3$) este egală cu $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.

2. Cele n laturi congruente ale unui poligon regulat $A_1A_2 \ldots A_n$ împart cercul în n arce congruente. Fiecare dintre aceste arce (și fiecare dintre unghiurile la centru corespunzătoare) are măsura de $\frac{360°}{n}$:

$$\overset{\frown}{A_1A_2} = \overset{\frown}{A_2A_3} = \ldots = \overset{\frown}{A_{n-1}A_n} = \overset{\frown}{A_nA_1} = \frac{360°}{n}; \qquad \sphericalangle A_1OA_2 = \sphericalangle A_2OA_3 = \ldots = \sphericalangle A_{n-1}OA_n = \sphericalangle A_nOA_1 = \frac{360°}{n}.$$

Știați că...?

În funcție de numărul laturilor, pentru poligoane se folosesc următoarele denumiri:

pentagon (5 laturi)	*heptagon* (7 laturi)	*eneagon* (9 laturi)	*dodecagon* (12 laturi)
hexagon (6 laturi)	*octogon* (8 laturi)	*decagon* (10 laturi)	*icosagon* (20 de laturi)

Utilizând un motor de căutare pe Internet, descoperiți și denumirile altor poligoane.

Utilizarea instrumentelor geometrice pentru construcția poligoanelor regulate

Dacă $n \geq 3$ este un divizor al lui 360, o metodă simplă de a construi un poligon regulat cu n laturi înscris într-un cerc este următoarea:

a. desenăm un cerc și o rază a acestuia;
b. folosind raportorul, construim unghiuri la centru adiacente cu măsura de $(360 : n)°$. Unind punctele, obținem un poligon regulat.

5.4

Exemplu

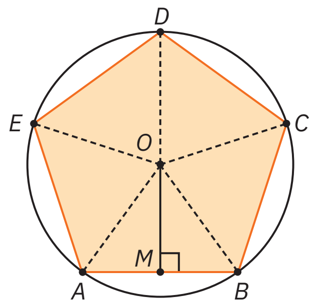


Figura 3

Pentru a construi un pentagon regulat *ABCDE* (Figura 3), alegem un punct *A* pe cerc și construim unghiurile la centru *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOE*, *EOA*, cu $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC =$ $= \sphericalangle COD = \sphericalangle DOE = \sphericalangle EOA = 360° : 5 = 72°$. În plus, avem: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EA} = 72°$ și $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = \sphericalangle E = 108°$.

Pentru construcția triunghiului echilateral, a pătratului, respectiv a hexagonului regulat înscris într-un cerc, există metode specifice, mai rapide și ingenioase, folosind doar rigla și compasul.

1. Construcția unui pătrat *ABCD* înscris într-un cerc $\mathcal{C}(O, r)$

a. Se alege pe cerc punctul *A* și se construiește diametrul *AC*.

b. Se construiește diametrul *BD* perpendicular pe *AC*.

c. Unim punctele *A*, *B*, *C*, *D*. Patrulaterul *ABCD* obținut este pătrat (Figura 4).

2. Construcția unui hexagon regulat *ABCDEF* înscris într-un cerc $\mathcal{C}(O, r)$

a. Se alege pe cerc punctul *A* și se construiește punctul *D*, diametral opus lui *A*.

b. Luăm în deschiderea compasului raza cercului. Cu vârful compasului în *A*, trasăm două arce de cerc ce intersectează cercul $\mathcal{C}(O, r)$ în punctele *B* și *F*, iar cu vârful compasului în *D* trasăm două arce de cerc ce intersectează cercul $\mathcal{C}(O, r)$ în punctele *C* și *E*.

c. Unim punctele *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*. Poligonul *ABCDEF* este hexagon regulat (Figura 5).

3. Construcția unui triunghi echilateral *PQR* înscris într-un cerc

a. Se alege pe cerc punctul *P* și se construiește punctul *S*, diametral opus lui *P*.

b. Cu vârful compasului în *S* și cu deschiderea compasului egală cu raza cercului, construim două arce de cerc care intersectează cercul inițial în punctele *Q* și *R*.

c. Unim punctele *P*, *Q* și *R* și obținem triunghiul echilateral *PQR* (Figura 6).

Alternativ, utilizând construcția de la hexagonul regulat, putem observa că triunghiurile *ACE* și *BDF* sunt echilaterale (Figura 7).

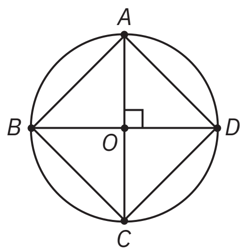


Figura 4

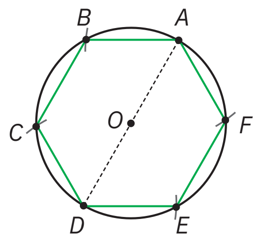


Figura 5

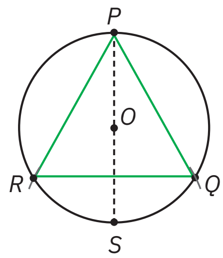


Figura 6

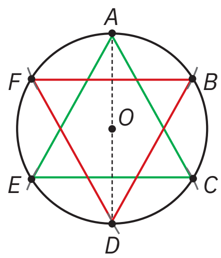


Figura 7

Portofoliu

Adăugați în portofoliul **Geometria cercului** fișe cu proprietățile următoare și demonstrațiile lor pentru cazul particular al pentagonului, respectiv al hexagonului regulat.

1. Mediatoarele laturilor unui poligon regulat sunt concurente în centrul cercului circumscris poligonului.
2. Bisectoarele unghiurilor unui poligon regulat sunt concurente în centrul cercului circumscris poligonului.

Probleme propuse

1. Construiți, folosind instrumentele geometrice, un poligon regulat cu:

   a. 6 laturi; **b.** 8 laturi; **c.** 9 laturi; **d.** 10 laturi; **e.** 12 laturi.

2. Determinați măsura unui unghi al unui poligon regulat cu:

   a. 9 laturi; **b.** 10 laturi; **c.** 12 laturi; **d.** 15 laturi; **e.** 20 de laturi.

3. Determinați măsura unui arc ale cărui extremități sunt vârfuri consecutive ale unui poligon regulat cu:
   a. 9 laturi; b. 12 laturi; c. 18 laturi; d. 24 de laturi; e. 30 de laturi.
4. Determinați numărul de laturi ale unui poligon regulat în fiecare dintre cazurile următoare:
   a. măsura unui unghi al poligonului este egală cu 170°;
   b. măsura unui unghi exterior al poligonului este egală cu 20°;
   c. arcul mic determinat de două vârfuri consecutive ale poligonului are măsura de 7°30';
   d. arcul mare determinat de două vârfuri consecutive ale poligonului are măsura de 351°.

5. Unim vârful A cu toate celelalte vârfuri ale poligonului regulat $ABCDEFGHI$. Determinați măsurile celor 7 unghiuri adiacente cu vârful în A astfel formate.
6. Dreptele AB și CD se intersectează în punctul P. Calculați măsura unghiului BPC, știind că A, B, C, D sunt vârfuri consecutive ale unui poligon regulat cu:
   a. 5 laturi; b. 8 laturi; c. 10 laturi.
7. Se consideră hexagonul regulat $ABCDEF$ înscris în cercul de centru O și rază 6 cm.
   a. Calculați perimetrul hexagonului $ABCDEF$.
   b. Arătați că patrulaterul $BCEF$ este dreptunghi.
   c. Calculați măsurile unghiurilor ACD, ACE și ACF.
8. Se consideră triunghiurile echilaterale ABC și MPQ, înscrise într-un cerc de centru O, astfel încât $\overset{\frown}{AM} = 60°$, punctul M se află pe arcul mic $\overset{\frown}{AC}$, iar punctul P se află pe arcul mic $\overset{\frown}{AB}$. Demonstrați că poligonul $MAPBQC$ este hexagon regulat.
9. Fie pătratele $ABCD$ și $MNPQ$, înscrise într-un cerc de centru O, astfel încât $\overset{\frown}{AM} = 45°$, punctul M se află pe arcul mic $\overset{\frown}{AD}$, iar punctul N se află pe arcul mic $\overset{\frown}{AB}$. Demonstrați că poligonul $MANBPCQD$ este octogon regulat.
10. Pe laturile triunghiului echilateral ABC se iau punctele $M, N \in BC$, $P, Q \in CA$, respectiv $R, S \in AB$ astfel încât $BM = MN = NC$, $CP = PQ = QA$ și $AR = RS = SB$. Arătați că $MNPQRS$ este hexagon regulat.
11. Construiți, în exteriorul unui hexagon regulat, pe laturile sale, triunghiuri echilaterale. Demonstrați că vârfurile triunghiurilor echilaterale, care nu sunt și ale hexagonului, formează un hexagon regulat.

Minitest

1. Se consideră un pătrat $ABCD$, înscris într-un cerc de centru O și rază R. Construiți un octogon regulat, în care patru dintre vârfuri să fie vârfurile pătratului $ABCD$. (3p)
2. Perimetrul unui pătrat este egal cu perimetrul unui hexagon regulat înscris într-un cerc de centru O și rază 6 cm. Determinați lungimea laturii pătratului. (3p)
3. Utilizând construcția unui hexagon regulat, construiți un poligon regulat cu 12 laturi. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

5.5

Lecția 5: Lungimea cercului și aria discului

Cuvinte-cheie

lungimea cercului | aria discului | lungimea arcului de cerc | aria sectorului de cerc

Lungimea cercului. Lungimea arcului de cerc

Investigație

Lungimea cercului. Se împarte clasa în cinci grupe. Fiecare grupă primește o foaie de flipchart, un marker, un compas și un ghem de sfoară.

Sarcini de lucru:

a. Pe foaia de flipchart, elevii desenează un cerc cu raza de 6 cm (prima grupă), de 8 cm (a doua grupă), de 10 cm (a treia grupă), de 12 cm (a patra grupă), respectiv de 15 cm (a cincea grupă).

b. Fiecare elev din grupă estimează lungimea cercului astfel: fixează un capăt al sforii într-un punct al cercului (diferit de la elev la elev), desfășoară sfoara pe circumferința cercului până când ajunge din nou în punctul ales și taie partea de sfoară rămasă. Apoi notează lungimea *l* a sforii utilizate și calculează, cu trei zecimale exacte, raportul dintre lungimea *l* obținută și diametrul *d* al cercului. Datele obținute se trec într-un tabel de forma:

Grupa	Numele elevului	Diametrul cercului (d)	Lungimea sforii (l)	Raportul d/l
nr. 2	Andrei	$2 \cdot 8$ cm $= 16$ cm	50,3 cm	3,143

c. Fiecare grupă calculează media aritmetică a rapoartelor obținute.

d. Comparați rezultatele obținute de fiecare grupă și verificați dacă sunt cuprinse între 3,13 și 3,15.

De reținut

Valoarea raportului dintre lungimea unui cerc oarecare și lungimea diametrului său este constantă (nu depinde de raza cercului).

Această constantă se notează cu π (litera din alfabetul grec corespunzătoare literei *p* din alfabetul latin) și se citește *pi*. Numărul π este irațional: $\pi = 3{,}14159265358979\ldots$.

În practică, folosim aproximarea cu două zecimale exacte $\pi \approx 3{,}14$ și încadrarea $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.

Lungimea unui cerc de rază R se determină din formula: $L_{\text{cerc}} = 2\pi R$.

Lungimea unui arc de cerc este direct proporțională cu măsura arcului. Deoarece lungimea cercului corespunde lungimii unui arc de 360°, are loc relația $\dfrac{L_{\overset{\frown}{AB}}}{\overset{\frown}{AB}} = \dfrac{2\pi R}{360^\circ}$, deci $L_{\overset{\frown}{AB}} = \dfrac{\pi R}{180^\circ} \cdot \overset{\frown}{AB}$.

Lungimea unui semicerc de rază R este egală cu πR.

Dacă $\sphericalangle AOB$ este un unghi la centru cu măsura de x° (Figura 1), atunci:

- lungimea arcului mic $\overset{\frown}{AB}$ este egală cu $\dfrac{\pi R}{180} \cdot x$;
- lungimea arcului mare $\overset{\frown}{AB}$ este egală cu $\dfrac{\pi R}{180} \cdot (360 - x)$.

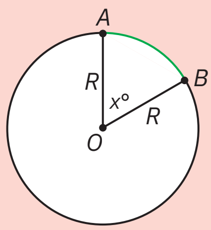


Figura 1

Exemple

1. Un cerc cu raza de 7 cm are lungimea $L = 2\pi R = 2\pi \cdot 7 = 14\pi$ cm.

2. Dacă un cerc are lungimea $L = 36\pi$ cm, atunci raza sa este $R = \dfrac{L}{2\pi} = \dfrac{36\pi}{2\pi} = 18$ cm.

3. Dacă AOB este un unghi la centru cu măsura de 60° într-un cerc cu raza $R = 9$ cm, lungimea arcului mic $\overset{\frown}{AB}$ este egală cu $\dfrac{\pi R}{180} \cdot 60 = 3\pi$ cm, iar cea a arcului mare $\overset{\frown}{AB}$ este $\dfrac{\pi R}{180} \cdot (360 - 60) = 15\pi$ cm.

Aria discului. Aria sectorului de cerc

De reținut

Ne amintim că un disc este mulțimea punctelor unui cerc reunită cu mulțimea punctelor din interiorul cercului: $\mathcal{D}(O, R) = \mathcal{C}(O, R) \cup \text{Int}(\mathcal{C}(O, R))$ (Figura 2).

Aria unui disc de centru O și rază R se calculează cu formula $\mathcal{A}_{disc} = \pi R^2$.

O porțiune din interiorul unui cerc delimitată de două raze ale cercului se numește *sector de cerc* (sau *sector circular*).

Aria unui sector de cerc este direct proporțională cu lungimea arcului de cerc corespunzător sectorului. Deoarece discul corespunde unui arc de 360°, pentru sectorul de cerc corespunzător arcului $\overset{\frown}{AB}$ cu măsura $x°$ (Figura 3) are loc relația $\dfrac{\mathcal{A}_{sector}}{\overset{\frown}{AB}} = \dfrac{\pi R^2}{360°}$, deci $\mathcal{A}_{sector} = \dfrac{\pi R^2}{360°} \cdot \overset{\frown}{AB}$.

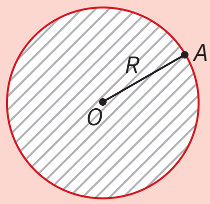


Figura 2

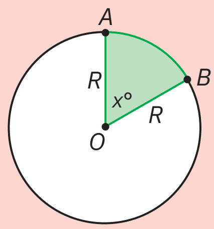


Figura 3

Portofoliu

Identificați, în activitățile voastre zilnice, obiecte care au formă de cerc (CD, DVD, pizza, capacul unui borcan etc). Calculați ariile suprafețelor lor.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. În Figura 4, BA și BC sunt tangente la cercul de centru O și rază 4 cm și $\sphericalangle ABC = 90°$.

a. Demonstrați că patrulaterul $ABCO$ este pătrat.

b. Calculați lungimea cercului și aria discului de centru O și rază OA.

c. Determinați lungimea arcului mic $\overset{\frown}{AC}$.

d. Determinați aria S a suprafeței aflate în interiorul patrulaterului $ABCO$, dar în exteriorul cercului de centru O și rază 4 cm.

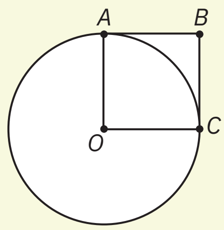


Figura 4

Rezolvare:

a. BA și BC sunt tangente la cerc din punctul B, deci $BA = BC$, $BA \perp OA$ și $BC \perp OC$. Cum $\sphericalangle ABC = 90°$, rezultă că $ABCO$ este un dreptunghi cu două laturi consecutive congruente, deci este pătrat.

b. $L_{cerc} = 2\pi \cdot R = 8\pi$ cm, $\mathcal{A}_{disc} = \pi R^2 = 16\pi$ cm^2.

c. $\overset{\frown}{AC} = \sphericalangle AOC = 90°$, deci $L_{\overset{\frown}{AC}} = \dfrac{\pi R}{180°} \cdot \overset{\frown}{AC} = \dfrac{\pi \cdot 4}{180°} \cdot 90° = 2\pi$ cm.

d. $S = \mathcal{A}_{ABCO} - \mathcal{A}_{sector} = 16 - \dfrac{\pi R^2}{360°} \cdot \overset{\frown}{AC} = 16 - 4\pi = 4(4 - \pi)$ cm.

2. Pătratul $ABCD$ din Figura 5 este înscris într-un cerc de rază 4 cm. Determinați aria suprafeței hașurate.

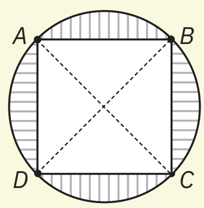


Figura 5

Rezolvare:

$AC = 2 \cdot AO = 8$ cm $\Rightarrow \mathcal{A}_{ABCD} = \dfrac{AC^2}{2} = 32$ cm^2.

Aria discului este egală cu $\pi R^2 = 16\pi$ cm^2.

$\mathcal{A}_{hașurată} = \mathcal{A}_{disc} - \mathcal{A}_{ABCD} = 16\pi - 32$ cm$^2 = 16(\pi - 2)$ cm^2.

3. Pe un cerc de centru O și rază $R = 6$ cm se consideră punctele A, B și C, ca în Figura 6, în această ordine, astfel încât $\sphericalangle AOB = 120°$ și $\overset{\frown}{BC} = 90°$. Calculați aria $\mathcal{A}_1$ a sectorului de cerc corespunzător arcului mic $\overset{\frown}{AB}$ și aria $\mathcal{A}_2$ a sectorului de cerc corespunzător arcului mic $\overset{\frown}{AC}$.

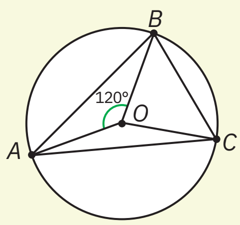


Figura 6

Rezolvare:

$\sphericalangle AOB = 120° \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 120° \Rightarrow \mathcal{A}_1 = \dfrac{\pi R^2}{360°} \cdot \overset{\frown}{AB} = \dfrac{36\pi}{360°} \cdot 120° = 12\pi$ cm^2.

$\overset{\frown}{AC} = 360° - \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{BC} = 150°$, deci $\mathcal{A}_2 = \dfrac{\pi R^2}{360°} \cdot \overset{\frown}{AC} = \dfrac{36\pi}{360°} \cdot 150° = 15\pi$ cm^2.

5.5

Probleme propuse

1. Determinați lungimea cercului cu raza egală cu:

a. 12 cm; **b.** 3,5 cm; **c.** $\frac{17}{2}$ cm.

2. Determinați raza cercului cu lungimea egală cu:

a. 14π cm; **b.** 72π cm; **c.** $\frac{11\pi}{3}$ cm.

3. Pe un cerc de centru O și rază R se consideră punctele A și B. Determinați lungimea arcului mic $\overset{\frown}{AB}$ și aria sectorului de cerc corespunzător știind că:

a. $R = 2$ cm și $\sphericalangle AOB = 60°$; **b.** $R = 6$ cm și $\sphericalangle AOB = 45°$;

c. $R = 7$ cm și $\sphericalangle AOB = 120°$; **d.** $R = 11$ cm și $\sphericalangle AOB = 90°$.

4. Determinați măsurile arcelor de cerc din cercul de centru O și rază 10 cm, care au lungimile:

a. 5π cm; **b.** 7π cm; **c.** $\frac{5\pi}{9}$ cm.

5. În Figura 7, cele două cercuri concentrice au razele de 8 cm și 6 cm. Calculați aria porțiunii hașurate.

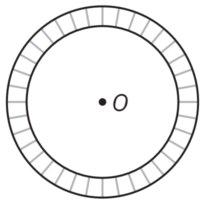


Figura 7

6. Determinați lungimea diametrului unui cerc știind că aria discului delimitat de acest cerc este egală cu 196π cm^2.

7. Lungimea unui cerc de rază $2R$ este egală cu 12π cm. Calculați aria discului de rază $3R$.

8. Pe marginea unui teren în formă de disc cu raza de 5 metri se plantează 8 pomi, la distanțe egale unul de celălalt. Arătați că, mergând pe marginea terenului, distanța dintre doi pomi alăturați este mai mare de 3,9 metri, dar mai mică de 4 metri.
Indicație. Calculați lungimea cercului care delimitează terenul și utilizați relația $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.

9. În Figura 8 sunt reprezentate două discuri. Punctele A și P sunt diametral opuse în cercul $\mathcal{C}_1$ de centru O, iar AB este diametru în cercul $\mathcal{C}_2$ de centru P. Calculați:

a. raportul dintre lungimea cercului $\mathcal{C}_2$ și lungimea cercului $\mathcal{C}_1$;

b. raportul dintre aria discului mare și aria discului mic.

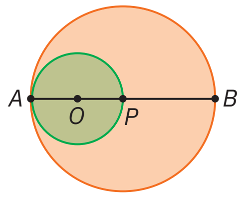


Figura 8

10. Raisa a desenat trei cercuri, ca în Figura 9. Punctele A, O și B sunt coliniare, iar $AB = 8$ cm. Folosind modelul Raisei, Sara a colorat desenul în două moduri, ca în Figura 10, respectiv Figura 11.

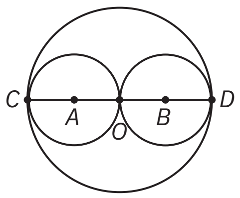


Figura 9

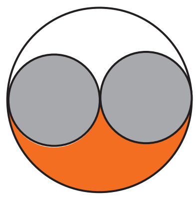


Figura 10

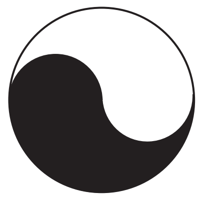


Figura 11

a. Calculați perimetrul P_1 și aria A_1 ale suprafeței colorate cu alb din Figura 10.

b. Calculați perimetrul P_2 și aria A_2 ale suprafeței colorate cu alb din Figura 11.

11. Se consideră pătratul $ABCD$ de latură $AB = 10$ cm. În interiorul pătratului, se construiesc sectoarele de cerc cu centrele în punctele A, respectiv C, de rază egală cu latura pătratului, ca în Figura 12. Determinați aria intersecției celor două sectoare (aria suprafeței hașurate).

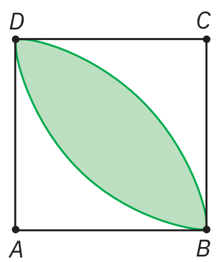


Figura 12

12. Se consideră pătratul $ABCD$, de latură $AB = 8$ cm. În interiorul pătratului, se construiesc semicercurile de diametre AD, respectiv BC, ca în Figura 13. Determinați aria suprafeței hașurate.

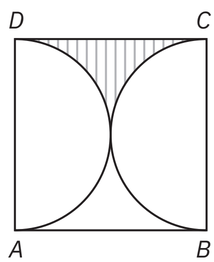


Figura 13

13. Se consideră pătratul $ABCD$, de latură $AB = 6$ cm. În interiorul pătratului, se construiesc semicercurile de diametre AB, BC, CD respectiv DA, ca în Figura 14. Determinați aria suprafeței colorate.

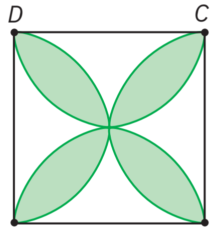


Figura 14

14. Un hexagon regulat $ABCDEF$ este înscris într-un cerc de centru O și rază R. Dacă $AB = 6$ cm, calculați lungimea cercului, aria discului, lungimea arcului $\overset{\frown}{ABC}$ și aria sectorului de cerc corespunzător arcului $\overset{\frown}{DEF}$.

15. La pizzeria *Bon Apetit*, fiecare sortiment de pizza se vinde în trei dimensiuni: mică, medie și mare. Având în vedere prețurile afișate, ce tip de pizza ar trebui să cumpere Tudor pentru a avea satisfacția că a plătit cât mai puțin în raport cu „suprafața” de pizza cumpărată?

Bon Apetit		
Tip pizza	**Diametru**	**Preț**
Mică	24 cm	28 lei
Medie	32 cm	40 lei
Mare	40 cm	64 lei

16. Pe anvelopa roții din dreapta față a mașinii tatălui său, Andrei marchează punctul A, diametral opus punctului în care cauciucul atinge solul. Diametrul anvelopei este de 63,2 cm.

a. Precizați valoarea de adevăr a afirmației: „Distanța parcursă de mașină până când punctul A atinge solul de 1000 de ori este de cel puțin 2 km.”

b. Arătați că, după un drum de 100 de km, punctul A atinge solul de mai mult de 50 000 de ori (se poate folosi faptul că $3{,}14 < \pi < 3{,}15$).

Autoevaluare

1. În cercul de centru O și rază 4 cm se consideră coarda AB cu lungimea de 4 cm. Calculați lungimea cercului, aria discului și lungimea arcului mare $\overset{\frown}{AB}$. (3p)

2. În cercul de centru O și rază R, se consideră diametrul AB. Știind că $AB = 12$ cm, punctul C se află pe cerc și $\overset{\frown}{AC} = 120°$, determinați aria sectorului de cerc corespunzător arcului mic $\overset{\frown}{BC}$. (3p)

3. Un teren are forma unui pătrat $ABCD$ cu latura $AB = 30$ m. Pe sectorul circular de centru A și rază AB, proprietarul terenului plantează flori, iar în porțiunea hașurată plantează gazon (Figura 15). Calculați aria porțiunii plantate cu gazon. (3p)

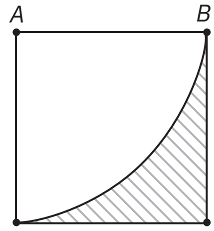


Figura 15

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Recapitulare și evaluare

Coarde și arce în cerc. Proprietăți • Unghi înscris în cerc • Tangente la cerc • Poligoane regulate înscrise într-un cerc • Lungimea cercului și aria discului

Pentru problemele 1-22, notați în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect. Pentru exercițiile 23-30, scrieți rezolvările complete.

1. În cercul $\mathcal{C}(O, r)$, se consideră arcele congruente $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$. Dacă $AB = 8$ cm, atunci CD are lungimea de:

a. 16 cm; **b.** 8 cm; **c.** 6 cm; **d.** 4 cm.

2. Diametrul perpendicular pe o coardă AB intersectează coarda în punctul P. Dacă $AB = 20$ cm, atunci lungimea segmentului PB este:

a. 10 cm; **b.** 20 cm; **c.** 30 cm; **d.** 40 cm.

3. Segmentul AB este diametru în cercul de centru O și rază 6,4 cm. Lungimea segmentului AB este de:

a. 64 cm; **b.** 3,2 cm; **c.** 12,8 cm; **d.** 32 cm.

4. Lungimea cercului cu raza de 4,5 cm este egală cu:

a. $4{,}5\pi$ cm^2; **b.** 18π cm^2;
c. $2{,}25\pi$ cm^2; **d.** 9π cm.

5. Aria discului cu raza de 3 cm este mai mică decât:

a. 26 cm^2; **b.** 27 cm^2; **c.** 29 cm^2; **d.** 28 cm^2.

6. Lungimea arcului de cerc cu măsura de 60°, într-un cerc cu raza de 3 cm, este egală cu:

a. 6 cm; **b.** π cm; **c.** 6π cm; **d.** 3π cm.

7. În $\mathcal{C}(O, r)$, măsura unui unghi înscris ABC este egală cu 40°. Măsura unghiului AOC este egală cu:

a. 80°; **b.** 20°; **c.** 60°; **d.** 120°.

8. Dacă BA este o tangentă din punctul exterior B la un cerc de centru O, atunci măsura unghiului BAO este egală cu:

a. 90°; **b.** 45°; **c.** 180°; **d.** 60°.

9. Perimetrul unui hexagon regulat înscris într-un cerc cu raza de 6 cm este egal cu:

a. 72 cm; **b.** 36 cm; **c.** 108 cm; **d.** 24 cm.

10. Aria unui pătrat înscris într-un cerc cu raza de 12 cm este egală cu:

a. 288 cm^2; **b.** 144 cm^2; **c.** 72 cm^2; **d.** 36 cm^2.

11. Măsura unui unghi al unui poligon regulat cu 18 laturi este:

a. 18°; **b.** 144°; **c.** 160°; **d.** 180°.

12. Unul dintre unghiurile unui poligon regulat are măsura de 144°. Numărul laturilor poligonului regulat este egal cu:

a. 18; **b.** 14; **c.** 12; **d.** 10.

13. Diametrul cercului cu lungimea 32π cm este egal cu:

a. 256 cm; **b.** 16 cm; **c.** 32 cm; **d.** 64 cm.

14. Diametrul cercului cu aria 81π cm^2 este egal cu:

a. 18 cm; **b.** 9 cm; **c.** 162 cm; **d.** 81 cm.

15 Într-un cerc de centru O se consideră punctele A, B, C și D, în această ordine. Dacă măsura unghiului BAC este 30°, atunci măsura unghiului BDC este egală cu:

a. 30°; **b.** 60°; **c.** 90°; **d.** 15°.

16. Pătratul $ABCD$ este înscris într-un cerc. Dacă punctul T este mijlocul arcului mic $\overset{\frown}{CD}$, atunci măsura unghiului ATB este egală cu:

a. 90°; **b.** 45°; **c.** 30°; **d.** 60°.

17. Într-un cerc de centru O, două coarde, AB și CD, sunt egal depărtate de centrul cercului. Dacă $AB = 22$ cm, atunci lungimea segmentului CD este egală cu:

a. 22 cm; **b.** 11 cm; **c.** 9 cm; **d.** 7 cm.

18. În trapezul $ABCD$, înscris în cercul de centru O și rază R, $AB \parallel CD$, $BC = 13$ cm. Lungimea laturii AD este egală cu:

a. 26 cm; **b.** 13 cm; **c.** 11 cm; **d.** 6,5 cm.

19. Tangentele AB și AC din punctul exterior A la cercul $\mathcal{C}(O, r)$ sunt perpendiculare. Măsura unghiului BOC este egală cu:

a. 90°; **b.** 45°; **c.** 30°; **d.** 180°.

20. Se consideră tangentele AB și AC din punctul exterior A la cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Dacă $AB = 9$ cm, atunci lungimea segmentului AC este egală cu:

a. 4,5 cm; **b.** 9 cm; **c.** 13,5 cm; **d.** 18 cm.

21. Pe un cerc se consideră punctele A, B și C, în această ordine, astfel încât $\overset{\frown}{AB} = 150°$ și $\overset{\frown}{BAC} = 50°$. Măsura arcului mic $\overset{\frown}{AC}$ este egală cu:

a. 110°; **b.** 55°; **c.** 100°; **d.** 160°.

22. Triunghiul echilateral ABC este înscris în $\mathcal{C}(O, r)$. Măsura arcului $\overset{\frown}{ABC}$ este egală cu:

a. 240°; **b.** 120°; **c.** 90°; **d.** 60°.

23. Precizați care dintre enunțurile de mai jos este adevărat și care este fals:

a. „Orice poligon regulat cu mai mult de trei laturi, are toate diagonalele congruente.”

b. „Lungimea unui cerc este mai mică decât lungimea unui diametru al cercului.”

c. „Dacă AB este un diametru în $\mathcal{C}(O, r)$, atunci punctele A, O, B sunt coliniare.”

d. „Dacă triunghiul echilateral ABC este înscris într-un cerc, atunci măsura arcului mic $\overset{\frown}{AC}$ este egală cu 60°.”

24. Asociați fiecărui tip de poligon din coloana **A** valoarea din coloana **B** corespunzătoare măsurii unui unghi al poligonului respectiv.

A	B
a. Poligon regulat cu 20 de laturi	**1.** 176°
b. Poligon regulat cu 30 de laturi	**2.** 168°
c. Poligon regulat cu 90 de laturi	**3.** 192°
	4. 162°

25. Determinați numerele naturale a, b, c și d din tabelul de mai jos:

Raza cercului	Lungimea cercului
5	a
b	38π
c	$2\pi c^2$
$2d$	πd^2

26. Într-un cerc $\mathcal{C}(O, r)$, se consideră punctele A, B, C și D, în această ordine. Determinați numerele a, b, c și d pentru care următoarele afirmații sunt adevărate.

Dacă $\overset{\frown}{BC} = 30°$, atunci $\sphericalangle BOC = a°$.
Dacă $\overset{\frown}{ABC} = 130°$, atunci $\sphericalangle ADC = b°$.
Dacă $\sphericalangle DCB = 110°$, atunci $\overset{\frown}{BAD} = c°$.
Dacă $\sphericalangle AOD = 80°$, atunci $\sphericalangle ABD = d°$.

27. Un autoturism parcurge o distanță astfel încât una dintre roți, cu diametrul de 40 cm, realizează 8000 de rotații complete. Arătați că distanța parcursă de autoturism este mai mare decât 10 km.

28. Se consideră tangentele din punctul A, AB și AC la $\mathcal{C}(O, r)$. Semidreapta CO intersectează cercul în punctul P. Dacă $\sphericalangle BAC = 60°$, atunci determinați măsura unghiului OPB.

29. Se consideră triunghiul ABC cu vârfurile pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$, iar AD, BE și CF sunt perpendiculare pe dreptele BC, AC, respectiv AB, cu $D, E, F \in \mathcal{C}(O, r)$. Se cunosc $\sphericalangle A = 40°$ și $\sphericalangle B = 66°$.

a. Determinați măsurile unghiurilor BAD și CAD.

b. Determinați măsurile arcelor $\overset{\frown}{BD}$, $\overset{\frown}{DC}$, $\overset{\frown}{AF}$ și $\overset{\frown}{FB}$.

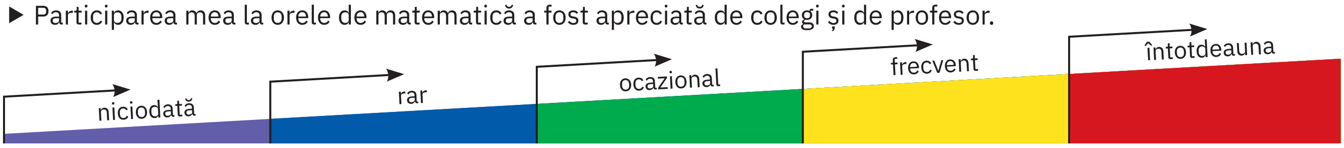
30. Pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$ se consideră punctele A, B și C, în această ordine, astfel încât $\overset{\frown}{AB} = 2 \cdot \overset{\frown}{BC}$ și $\overset{\frown}{AC} = \frac{3}{2} \cdot \overset{\frown}{AB}$.

a. Determinați măsurile arcelor $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ și $\overset{\frown}{BC}$.

b. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic.

Fișa de observare sistematică

- Am fost preocupat să aflu lucruri noi despre metodele de rezolvare a problemelor.
- Participarea mea la orele de matematică a fost apreciată de colegi și de profesor.



U6 Asemănarea triunghiurilor

Lecția 1 Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante

Lecția 2 Teorema lui Thales

Lecția 3 Triunghiuri asemenea. Teorema fundamentală a asemănării

Lecția 4 Criterii de asemănare a triunghiurilor.
Aproximarea în practică a distanțelor folosind asemănarea

Recapitulare și evaluare

Conceptul de triunghiuri asemenea este foarte util în viața de zi cu zi. Putem să determinăm înălțimea unei clădiri sau a unui turn măsurând mai întâi lungimea umbrei acelui obiect și recurgând apoi la triughiuri asemenea.

Cu ajutorul triughiurilor asemenea putem determina înălțimea unui copac fără a fi necesar să ne urcăm în vârful lui și să dăm drumul unei rulete până la pământ.

6.1

Lecția 1: Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante

Cuvinte-cheie

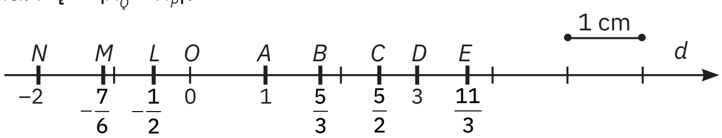
raport | proporție | coeficient de proporționalitate | paralele echidistante

Raportul a două segmente

Situație-problemă

Pe axa numerelor d, reprezentată mai jos, unitatea de măsură este de 1 cm. Considerăm punctele O, A, B, C, D, E, L, M, N de pe axă, ale căror abscise sunt indicate pe figură.

Ne reamintim că, dacă x_P și x_Q sunt abscisele a două puncte oarecare P și Q de pe axă, atunci lungimea segmentului PQ este dată de relația: $PQ = |x_Q - x_P|$.



Segmentul OA are 1 cm, iar lungimea lui ON este de 2 cm. Altfel spus, ON este de două ori mai mare decât OA, adică $ON = 2OA$. Putem scrie și $\frac{ON}{OA} = 2$ sau $\frac{OA}{ON} = \frac{1}{2}$. Avem $CD = \left|3 - \frac{5}{2}\right| \text{cm} = \frac{1}{2} \text{cm} = 0{,}5 \text{ cm}$ și $BE = \left|\frac{11}{3} - \frac{5}{3}\right| \text{cm} = 2 \text{ cm}$.

Deoarece $\frac{2}{0{,}5} = 4$, rezultă că segmentul BE este de 4 ori mai mare decât CD. Pe scurt, $\frac{BE}{CD} = \frac{2 \text{ cm}}{0{,}5 \text{ cm}} = \frac{2}{0{,}5} = 4$.

Pentru a reprezenta pe axă un punct F, diferit de cele dinainte, astfel încât $\frac{MN}{CF} = \frac{5}{9}$, procedăm astfel: deoarece $MN = \left|(-2) - \left(-\frac{7}{6}\right)\right| = \frac{5}{6} \text{ cm}$, rezultă $CF = \frac{9}{5} \cdot MN = \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{6} \text{ cm} = \frac{3}{2} \text{ cm}$. Deoarece $AC = 1{,}5$ cm, dacă l-am reprezenta pe F în stânga lui C, ar coincide cu A, deci F trebuie să fie pus la 1,5 cm în dreapta lui C. Mai exact, abscisa punctului F este 4.

Ce observăm?

Fiind date două segmente, pentru a exprima lungimea unuia dintre segmente în funcție de lungimea celuilalt, putem folosi raportul lungimilor celor două segmente.

De reținut

Definiție. Raportul a două segmente este raportul lungimilor lor, exprimate cu aceeași unitate de măsură.

În Figura 1, avem:

a. $\frac{PQ}{AB} = \frac{3}{4}$; **b.** $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$; **c.** $\frac{PR}{AC} = \frac{1}{2}$; **d.** $\frac{AB}{PR} = 4$.

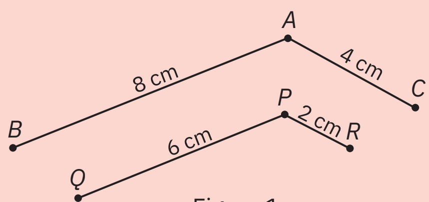


Figura 1

Activitate pe grupe

Reproduceți axa numerelor și punctele O, A, B, C, D, E, L, M, N de la rubrica **Mate practică**. Reprezentați apoi punctul F găsit anterior. Lucrând în echipe de câte 4 elevi (două bănci), indicați: **1.** trei perechi de segmente al căror raport este număr întreg; **2.** cinci perechi de segmente al căror raport este număr rațional subunitar; **3.** două perechi de segmente care au același raport. Comparați rezultatele voastre cu cele obținute de colegi.

Observații

1. Raportul a două segmente nu depinde de unitatea de măsură aleasă pentru măsurarea segmentelor.

Exemplu: În tabelul următor, am calculat raportul segmentelor $AB = 24$ cm și $CD = 36$ cm, folosind diverse unități de măsură.

	unitatea de măsură		
	centimetru	**metru**	**milimetru**
AB	24 cm	0,24 m	240 mm
CD	36 cm	0,36 m	360 mm
$\frac{AB}{CD}$	$\frac{AB}{CD}=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$	$\frac{AB}{CD}\overset{100)}{=}\frac{0,24}{0,36}=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$	$\frac{AB}{CD}=\frac{240^{(10}}{360}=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$

2. Pentru a determina raportul a două segmente care nu sunt exprimate cu aceeași unitate de măsură, se folosesc transformări pentru a scrie lungimile cu aceeași unitate de măsură.

Exemplu: Fiind date segmentele $MN=14$ dm și $PQ=3{,}5$ m, vom face transformări pentru a utiliza aceeași unitate de măsură. Putem folosi una dintre unitățile de măsură în care sunt exprimate segmentele date (decimetri sau metri) sau o altă unitate de măsură pentru lungime.

Folosind ca unitate de măsură decimetrul (dm), avem $PQ=35$ dm, deci $\frac{MN}{PQ}=\frac{14}{35}=\frac{2}{5}$.

Folosind ca unitate de măsură metrul (m), avem: $\frac{MN}{PQ}=\frac{14\text{ dm}}{3{,}5\text{ m}}=\frac{1{,}4\text{ m}}{3{,}5\text{ m}}=\frac{1{,}4}{3{,}5}=\frac{14}{35}=\frac{2}{5}$.

Transformând ambele unități în centimetri (cm), găsim: $\frac{MN}{PQ}=\frac{14\text{ dm}}{3{,}5\text{ m}}=\frac{140\text{ cm}}{350\text{ cm}}=\frac{140}{350}=\frac{2}{5}$.

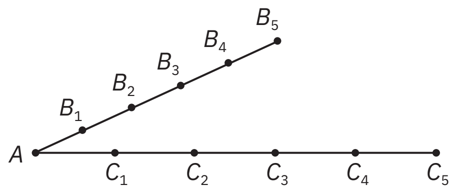
Se observă încă o dată că raportul celor două segmente nu depinde de unitatea de măsură.

Segmente proporționale

Situație-problemă

În Figura 2, observăm că:

- $\frac{AB_1}{B_2B_5}=\frac{1}{3}$ și $\frac{AC_1}{C_2C_5}=\frac{1}{3}$, adică $\frac{AB_1}{B_2B_5}=\frac{AC_1}{C_2C_5}$;
- $\frac{AB_2}{AB_3}=\frac{2}{3}$ și $\frac{AC_2}{AC_3}=\frac{2}{3}$, deci $\frac{AB_2}{AB_3}=\frac{AC_2}{AC_3}$;
- $\frac{B_1B_5}{B_2B_3}=4$ și $\frac{C_1C_5}{C_2C_3}=4$, de unde $\frac{B_1B_5}{B_2B_3}=\frac{C_1C_5}{C_2C_3}$.



$AB_1=B_1B_2=B_2B_3=B_3B_4=B_4B_5$

$AC_1=C_1C_2=C_2C_3=C_3C_4=C_4C_5$

Figura 2

Astfel, cu două perechi de segmente care au același raport putem forma o proporție.

De reținut

Definiție. Segmentele AB și CD sunt proporționale cu segmentele $A'B'$ și $C'D'$ dacă $\frac{AB}{A'B'}=\frac{CD}{C'D'}$.

Cu alte cuvinte, cu lungimile celor patru segmente se poate forma o proporție. În exemplul dat:

- segmentele AB_1 și AC_1 sunt proporționale cu segmentele B_2B_5 și C_2C_5, întrucât $\frac{AB_1}{B_2B_5}=\frac{AC_1}{C_2C_5}$;
- segmentele AB_2 și AC_2 sunt proporționale cu segmentele AB_3 și AC_3, deoarece $\frac{AB_2}{AB_3}=\frac{AC_2}{AC_3}$.

Observație

Fie $n\geq 2$ un număr natural. Două secvențe de numere reale $x_1, x_2,..., x_n$ și $y_1, y_2,..., y_n$ sunt proporționale dacă:

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\ldots=\frac{x_n}{y_n}=k,$$

iar valoarea k, comună acestor rapoarte, se numește coeficient de proporționalitate.

În figura anterioară, întrucât $AB_2=2AB_1$ și $AB_3=3AB_1$, respectiv $AC_2=2AC_1$ și $AC_3=3AC_1$, avem $\frac{AB_2}{AC_2}=\frac{2AB_1}{2AC_1}=\frac{AB_1}{AC_1}$ și $\frac{AB_3}{AC_3}=\frac{3AB_1}{3AC_1}=\frac{AB_1}{AC_1}$, adică $\frac{AB_1}{AC_1}=\frac{AB_2}{AC_2}=\frac{AB_3}{AC_3}$.

Extinzând definiția de mai sus, spunem că segmentele AB_1, AB_2, AB_3 sunt proporționale cu segmentele AC_1, AC_2 și AC_3.

6.1

Teorema paralelelor echidistante

Situație-problemă

Dreptele paralele d_1, d_2, d_3 se intersectează cu două secante, obținând punctele A, B, C, D, E, F, ca în Figura 3. Folosind rigla, măsurați segmentele obținute și verificați dacă $AB = BC$ și $DE = EF$. Vom arăta că, dacă $AB = BC$, atunci $DE = EF$ și reciproc, dacă $DE = EF$, atunci $AB = BC$.

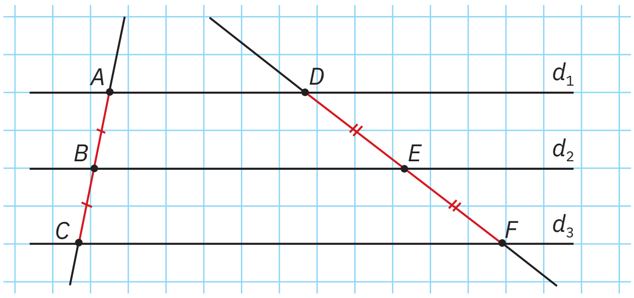


Figura 3

Construim prin A paralela la dreapta DE și notăm cu B', respectiv C' punctele de intersecție ale acesteia cu celelalte două paralele (Figura 4). Observăm că patrulaterele $ADEB'$ și $EFC'B'$ sunt paralelograme, deci $DE = AB'$ și $EF = B'C'$.

Este evident că, dacă B este mijlocul segmentului AC, atunci segmentul BB' este linie mijlocie în triunghiul ACC'. În consecință, B' este mijlocul segmentului AC', deci $AB' = B'C'$ și, implicit, $DE = EF$.

Pentru reciprocă se procedează la fel.

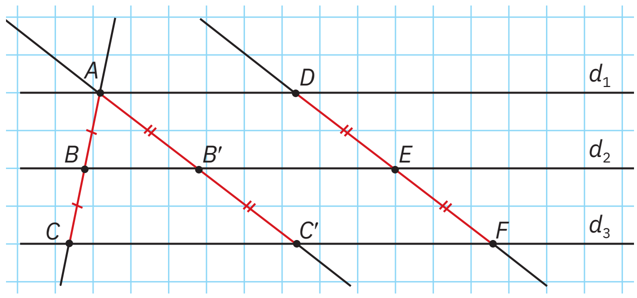


Figura 4

Ce observăm?

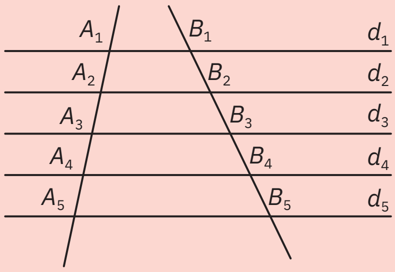
Dacă trei drepte paralele intersectate de două secante determină segmente congruente pe una dintre secante, atunci determină segmente congruente și pe cealaltă secantă.

Această proprietate este un caz particular al teoremei de mai jos, pe care o acceptăm fără demonstrație.

De reținut

Teorema paralelelor echidistante

Dacă mai multe drepte paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci ele determină pe orice altă secantă segmente congruente.



Ipoteză: $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \parallel d_5 \parallel ...$
$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = ...$

Concluzie: $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5 = ...$

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Pe segmentul AB se consideră punctul P astfel încât $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{3}{5}$.

Calculați rapoartele:

a. $\dfrac{PB}{AP}$; **b.** $\dfrac{AP}{AB}$; **c.** $\dfrac{PB}{AB}$; **d.** $\dfrac{5PA}{11PB}$; **e.** $\dfrac{AP+AB}{AB}$; **f.** $\dfrac{2 \cdot PB + AP}{AP + 3 \cdot PB}$.

Rezolvare:

Relația $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{3}{5}$ se scrie echivalent $\dfrac{AP}{3} = \dfrac{PB}{5} = k$, $AP = 3k$, $PB = 5k$ și $AB = 8k$. Obținem:

a. $\dfrac{PB}{AP} = \dfrac{5k}{3k} = \dfrac{5}{3}$; **b.** $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{3k}{8k} = \dfrac{3}{8}$; **d.** $\dfrac{5PA}{11PB} = \dfrac{15k}{55k} = \dfrac{3}{11}$; **f** $\dfrac{2 \cdot PB + AP}{AP + 3 \cdot PB} = \dfrac{13}{18}$.

Probleme propuse

1. Se consideră segmentele AB și CD, astfel încât $AB = 6$ cm și $CD = 3$ cm. Calculați valoarea rapoartelor:
   a. $\frac{AB}{CD}$; b. $\frac{CD}{AB}$; c. $\frac{AB}{AB}$; d. $\frac{AB+CD}{CD}$.

2. Se consideră segmentele AB și CD, astfel încât $AB = 4$ dm și $CD = 0{,}1$ m. Calculați valoarea rapoartelor:
   a. $\frac{AB}{CD}$; b. $\frac{CD}{AB}$; c. $\frac{AB+CD}{AB}$; d. $\frac{AB+CD}{AB-CD}$.

3. Fie A, B, C puncte coliniare, în această ordine, cu $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm. Calculați valoarea rapoartelor:
   a. $\frac{AB}{BC}$; b. $\frac{AC}{AB}$; c. $\frac{AB+BC}{AC}$; d. $\frac{AB}{BC}+\frac{AB}{AC}$.

4. Calculați raportul segmentelor AB și CD, știind că:
   a. $AB = 4$ cm, $CD = 20$ mm; b. $AB = 50$ mm, $CD = 0{,}5$ dm;
   c. $AB = 8$ m, $CD = 1{,}6$ dam; d. $AB = 4{,}8$ hm, $CD = 0{,}24$ km.

5. În triunghiul ABC, segmentul EF este linie mijlocie, $E \in AB$, $F \in AC$. Calculați valoarea rapoartelor:
   a. $\frac{AE}{EB}$; b. $\frac{AF}{AC}$; c. $\frac{EF}{BC}$; d. $\frac{AB}{EB}$; e. $\frac{BC}{EF}$.

6. Punctul M este situat pe segmentul AB, astfel încât $AM = \frac{1}{4}AB$. Determinați:
   a. $\frac{AM}{AB}$; b. $\frac{MB}{AB}$; c. $\frac{AM}{MB}$; d. $\frac{AB}{MB}$; e. $\frac{AM}{MB}+\frac{AB}{MB}$.

7. Dacă A, B și C sunt puncte coliniare, în această ordine, $AC = 24$ cm și $\frac{AB}{BC}=\frac{1}{3}$, calculați AB și BC.

8. Lungimile laturilor AB, AC și BC ale triunghiului ABC sunt proporționale cu numerele 3, 4 și 6. Știind că perimetrul triunghiului ABC este egal cu 39 cm, determinați AB, AC și BC.

9. Stabiliți dacă segmentele AB și BC sunt proporționale cu segmentele CD și DE, știind că:
   a. $AB = 8$ cm; $BC = 4$ cm; $CD = 16$ cm și $DE = 8$ cm;
   b. $AB = 12$ cm; $BC = 0{,}4$ dm și $\frac{CD}{DE} = 0{,}3$.

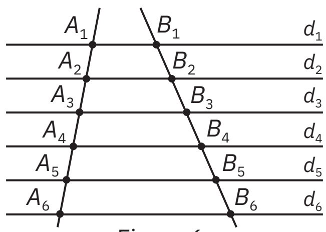


Figura 6

10. În Figura 6, $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \parallel d_5 \parallel d_6$ și $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6$. Dacă $B_1B_6 = 25$ cm, calculați B_1B_2, B_1B_4, B_2B_4 și B_3B_6.

11. Se consideră trapezul $ABCD$ cu baza mare AB, punctele M, N pe latura AD și punctele P, Q pe latura BC, astfel încât $AM = MN = ND$ și $MP \parallel NQ \parallel AB$. Fie R și S intersecțiile diagonalei AC cu dreptele MP, respectiv NQ. Dacă $SQ = 2$ cm și $MR = 1$ cm, determinați lungimile bazelor AB și CD ale trapezului.

12. Se consideră trapezul $ABCD$ cu baza mare AB, punctele M, N, P pe latura AD și punctele Q, R, S pe latura BC, astfel încât $AM = MN = NP = PD$ și $MQ \parallel NR \parallel PS \parallel CD$.
    a. Demonstrați că R este mijlocul segmentului SQ.
    b. Dacă $MQ = 14$ cm, $PS = 10$ cm, iar punctele E și F sunt intersecțiile diagonalelor AC, respectiv BD cu segmentul NR, determinați lungimea segmentului EF.

Minitest

1. Se consideră segmentele AB și CD, astfel încât $AB = 0{,}12$ dam și $CD = 40$ cm. Calculați valoarea rapoartelor:
   a. $\frac{AB}{CD}$; b. $\frac{CD}{AB}$; c. $\frac{AB+CD}{AB}$. (3p)

2. Dacă A, B și C sunt puncte coliniare, în această ordine, $AC = 18$ cm și $\frac{AB}{BC}=\frac{4}{5}$, calculați AB și BC. (3p)

3. Lungimile laturilor AB, AC și BC ale triunghiului ABC sunt direct proporționale cu numerele 2, 4 și 5. Știind că cea mai mare dintre laturi are lungimea de 15 cm, determinați perimetrul triunghiului ABC. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

6.2

Lecția 2: Teorema lui Thales

Cuvinte-cheie

segmente proporționale | paralele neechidistante | teoremă directă | proporții derivate | teoremă reciprocă

Teorema lui Thales

Mate practică

Considerăm triunghiul ABC și punctele D și E pe laturile AB, respectiv AC, astfel încât $\frac{AD}{DB}=\frac{2}{3}$ și $DE \parallel BC$ (Figura 1).

Ne propunem să aflăm în ce raport împarte punctul E latura AC.

Deoarece $\frac{AD}{DB}=\frac{2}{3}$, vom împărți segmentul AD în două părți egale: $AM=MD$ și segmentul DB în trei părți egale: $DN=NP=PB$. Astfel, punctele M, D, N și P împart latura AB în cinci segmente congruente: $AM=MD=DN=NP=PB$ (Figura 2).

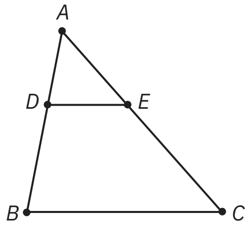


Figura 1

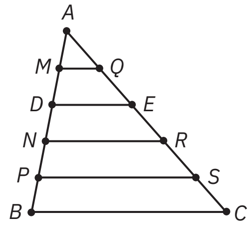


Figura 2

Construim paralele prin M, N și P la dreapta BC; acestea intersectează latura AC în punctele Q, R și respectiv S. Aplicând teorema paralelelor echidistante, obținem $AQ=QE=ER=RS=SC$, de unde rezultă că $\frac{AE}{EC}=\frac{2}{3}$.

Ce observăm?

Paralela DE dusă la latura BC împarte laturile AB și AC în același raport: $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=\frac{2}{3}$.

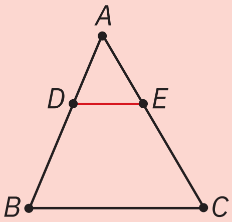
Altfel spus, dreapta DE determină pe cele două laturi ale triunghiului segmente proporționale.

Problema de mai sus este un caz particular al teoremei enunțate în continuare, pe care o acceptăm fără demonstrație.

De reținut

Teorema lui Thales

O paralelă cu una dintre laturile unui triunghi, ce nu conține niciun vârf al triunghiului, determină pe celelalte două laturi segmente proporționale.



Ipoteză: ΔABC

$DE \parallel BC$, $D \in AB$, $E \in AC$

Concluzie: $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

Exemplu

Pe latura AB a triunghiului ABC, cu $AB=6$ cm, se consideră punctul D cu proprietatea că $AD=4$ cm. Paralela prin D la BC intersectează latura AC în E. Știind că $AE=6$ cm, vom determina lungimea laturii AC.

Conform teoremei lui Thales, avem $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$. Cum $DB=AB-AD=2$ cm, se obține $EC=3$ cm. Ca urmare, $AC=AE+EC=9$ cm.

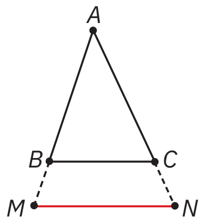
Alternativ, adunând numărătorii la numitori în proporția $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$, obținem $\frac{AD}{AD+DB}=\frac{AE}{AE+EC}$, adică $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$, de unde se obține direct $AC=\frac{AB\cdot AE}{AD}=9$ cm.

Observații

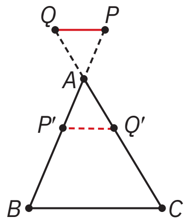
1. Folosind proporții derivate, concluzia teoremei lui Thales se poate scrie și sub una din formele:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} \text{ sau } \frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}.$$

2. Teorema lui Thales rămâne adevărată și în cazul în care paralela dusă la una dintre laturi intersectează prelungirile celorlalte două laturi.
Sunt două configurații posibile: o paralelă la dreapta BC poate fi dusă în semiplanul determinat de paralela prin A la BC și de punctul B (cazul 1) sau în semiplanul opus (cazul 2):



Cazul 1



Cazul 2

Ipoteză: **1.** $MN \parallel BC$, $M \in (AB$, $N \in (AC$
2. $PQ \parallel BC$, $P \in (BA$, $Q \in (CA$

Concluzie: **1.** $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}; \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$
2. $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}; \frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}$

1. Evident, este suficient să aplicăm teorema lui Thales în triunghiul AMN, cu $BC \parallel MN$.

2. Construim simetricele P' și Q' ale punctelor P și Q față de punctul A. Patrulaterul $PQP'Q'$ este paralelogram, deci $P'Q' \parallel PQ \parallel BC$. Aplicând teorema lui Thales în triunghiul ABC, în care $P'Q' \parallel BC$, rezultă $\frac{AP'}{AB}=\frac{AQ'}{AC}$, iar concluzia se obține observând că $AP'=AP$ și $AQ'=AQ$.

Având în vedere rezultatele de mai sus, putem enunța o formă extinsă a teoremei lui Thales, care înglobează toate configurațiile prezentate:

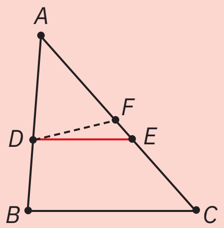
Teorema lui Thales

O paralelă dusă la una dintre laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi sau pe prelungirile acestora segmente proporționale.

De reținut

Reciproca teoremei lui Thales

O dreaptă care determină pe laturile unui triunghi segmente omoloage proporționale cu aceste laturi este paralelă cu a treia latură a triunghiului.



Ipoteză: ΔABC
$d \cap AB=\{D\}$, $d \cap AC=\{E\}$
$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

Concluzie: $DE \parallel BC$

Demonstrație:

Vom folosi metoda reducerii la absurd. Presupunând că DE nu este paralelă cu BC, construim paralela prin D la BC și notăm cu F punctul ei de intersecție cu AC; atunci $F \neq E$. Conform teoremei lui Thales, din $DF \parallel BC$ rezultă $\frac{AD}{AB}=\frac{AF}{AC}$. Dar $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$, deci $\frac{AE}{AC}=\frac{AF}{AC}$, ceea ce conduce la $AE=AF$. Rezultă că punctele E și F coincid, contradicție. Presupunerea făcută este falsă, deci $DE \parallel BC$.

Observație

Ca mai sus, putem extinde concluzia reciprocei teoremei lui Thales la situațiile în care o dreaptă determină pe prelungirile laturilor unui triunghi segmente omoloage proporționale cu laturile. Astfel, are loc următorul rezultat mai general:

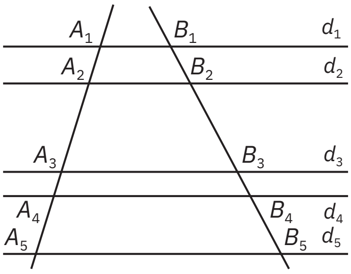
Teoremă. Fie triunghiul ABC și punctele $D \in AB$, $E \in AC$, aflate în același semiplan determinat de paralela prin A la BC. Dacă $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$, atunci $DE \parallel BC$.

6.2

Aplicații ale teoremei lui Thales

1. Teorema paralelelor neechidistante

Mai multe drepte paralele determină pe două secante segmente proporționale.



Ipoteză: $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \parallel d_5 \parallel \ldots$

Concluzie: $\dfrac{A_1A_2}{B_1B_2} = \dfrac{A_2A_3}{B_2B_3} = \dfrac{A_3A_4}{B_3B_4} = \dfrac{A_4A_5}{B_4B_5} = \ldots$

Portofoliu

Demonstrează teorema de mai sus pentru cazul particular a patru drepte paralele intersectate de două secante.

În demonstrație poți folosi următoarele idei:

- construiește o paralelă prin punctul B_1 la dreapta A_1A_2 și intersectează această paralelă cu d_2 și d_3 (vezi Figura 3);
- aplică teorema lui Thales în triunghiul $B_1C_3B_3$ și demonstrează egalitatea $\dfrac{A_1A_2}{B_1B_2} = \dfrac{A_2A_3}{B_2B_3}$;
- construiește o nouă paralelă la dreapta A_1A_2, de data aceasta prin punctul B_2, apoi finalizează demonstrația.

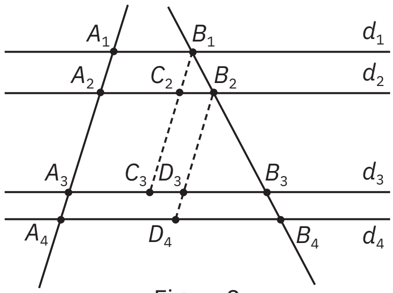


Figura 3

2. Împărțirea unui segment în părți proporționale cu numere (segmente) date

Considerăm un segment dat AB pe care ne propunem să-l împărțim în părți (segmente) proporționale cu numerele 2, 3 și 6. Altfel spus, ne punem problema determinării a două puncte M și N pe segmentul AB, astfel încât $\dfrac{AM}{2} = \dfrac{MN}{3} = \dfrac{NB}{6}$.

De fapt, problema revine la a împărți segmentul AB în 2 + 3 + 6 = 11 segmente de lungimi egale. Pentru aceasta, vom construi o semidreaptă oarecare Ax, pe care construim, cu ajutorul compasului, 11 segmente congruente (vezi Figura 4). Observăm că $AA_2 = 2u$, $A_2A_5 = 3u$ și $A_5A_{11} = 6u$. Ducem paralelele $A_2M \parallel A_{11}B$ și $A_5N \parallel A_{11}B$.

Cu ajutorul teoremei paralelor neechidistante, obținem $\dfrac{AM}{2} = \dfrac{MN}{3} = \dfrac{NB}{6}$.

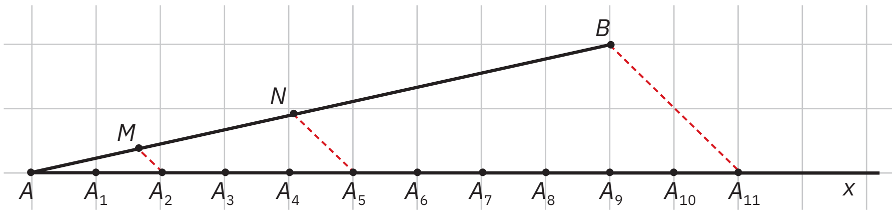


Figura 4

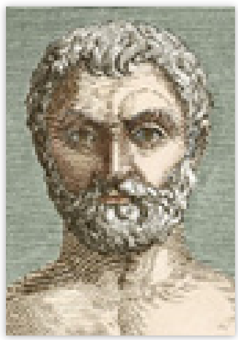
Cultură matematică

Thales din Milet (623 î.H. – 546 î.H.)

Thales din Milet a fost un filozof, matematician și astronom grec, considerat părintele științelor și unul dintre cei șapte înțelepți ai Greciei antice. Thales este deseori considerat a fi „primul mare matematician grec”.

Thales este prima persoană căreia i-a fost atribuită o descoperire matematică. De asemenea, este considerat a fi prima persoană care a utilizat raționamentul deductiv aplicat in geometrie. Matematicianul s-a familiarizat cu geometria in timpul călătoriilor sale in Egipt; a dezvoltat ulterior acest domeniu și a diseminat cunoștințeledespre geometrie in Grecia. Teoremele geometrice elaborate de el au constituit temelia matematicii grecești.

Citiți mai multe despre Thales din Milet în surse de internet recomandate de profesorul vostru.



Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AC \cap BD = \{O\}$, $BD = 20$ cm și $\frac{AO}{OC} = \frac{2}{3}$. Calculați lungimile segmentelor BO și OD.

Rezolvare:
Dreapta AB este paralelă cu latura CD a triunghiului ODC și intersectează prelungirile laturilor OC și OD în punctele A și B (Figura 5).

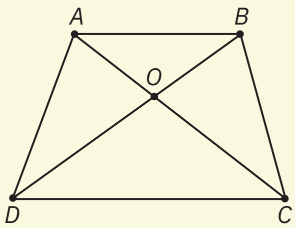
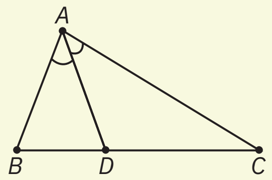


Figura 5

Aplicând teorema lui Thales, rezultă $\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD}$, de unde $\frac{BO}{OD} = \frac{2}{3}$.

Atunci $\frac{BO}{BO+OD} = \frac{2}{2+3}$, adică $\frac{BO}{BD} = \frac{2}{5}$, deci $BO = \frac{2}{5} \cdot BD = \frac{2}{5} \cdot 20\text{ cm} = 8\text{ cm}$, iar $DO = BD - BO = 12$ cm.

2. În orice triunghi, bisectoarea unui unghi determină pe latura opusă două segmente proporționale cu celelalte două laturi.



Ipoteză: ΔABC
$\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$, $D \in BC$

Concluzie: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$

Rezolvare:
Concluzia este evident adevărată dacă $AB = AC$. În continuare, presupunem $AB \neq AC$.

Construim paralela prin B la AD și notăm cu P punctul în care aceasta intersectează dreapta AC (Figura 6). Deoarece $\sphericalangle APB \equiv \sphericalangle CAD$ (unghiuri corespondente) și $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ABP$ (alterne interne), rezultă $\sphericalangle APB \equiv \sphericalangle ABP$, adică triunghiul ABP este isoscel.

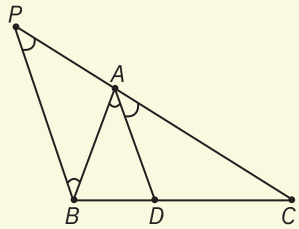


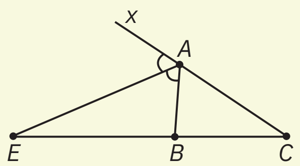
Figura 6

Ca urmare, $AP = AB$. Cum $BP \parallel AD$, aplicând teorema lui Thales rezultă $\frac{DB}{DC} = \frac{AP}{AC}$, adică $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Comentariu. Problema este cunoscută în literatura de specialitate ca *teorema bisectoarei*.

Folosind soluția problemei 3 (teorema bisectoarei), încercați să demonstrați că:

Dacă două laturi ale unui triunghi nu sunt congruente, bisectoarea exterioară a unghiului format de acestea determină pe dreapta suport a laturii opuse segmente proporționale cu laturile necongruente (teorema bisectoarei exterioare).



Ipoteză: ΔABC, $AB \neq AC$
$\sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle EAX$, $E \in BC$

Concluzie: $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$

Probleme propuse

1. În Figura 7, $DE \parallel BC$, $AD = 4$ cm, $AE = 3$ cm și $EC = 6$ cm. Calculați AC, DB și AB.

2. Punctele D și E sunt situate pe laturile AB, respectiv AC, ale triunghiului ABC astfel încât $DE \parallel BC$.

a. Dacă $AD = 2$ cm, $AB = 6$ cm și $AC = 12$ cm, calculați DB, AE și EC.

b. Dacă $AD = 3$ cm, $DB = 4$ cm și $AE = 6$ cm, calculați AB, EC și AC.

c. Dacă $DB = 6$ cm, $AB = 9$ cm și $AC = 12$ cm, calculați AD, AE și EC.

3. În triunghiul ABC, punctele D și E sunt situate pe laturile AB, respectiv AC, astfel încât $DE \parallel BC$.

a. Dacă $BE = 6$ cm, $AE = 8$ cm și $BF = 4$ cm, calculați AB, FC și BC.

b. Dacă $BF = 12$ cm, $FC = 8$ cm și $AE = 5$ cm, calculați BC, BE și AB.

c. Dacă $BE = 16$ cm, $AB = 24$ cm și $BF = 8$ cm, calculați AE, FC și BC.

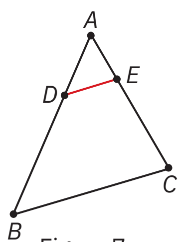


Figura 7

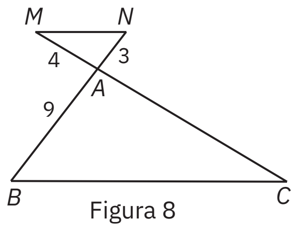


Figura 8

4. În Figura 8, se știe că $MN \parallel BC$, $AM = 4$ cm, $AN = 3$ cm și $AB = 9$ cm. Calculați AC și MC.

5. În Figura 9, se știe că $MN \parallel BC$, $AB = 10$ cm, $AN = 15$ cm și $AM = 25$ cm. Calculați NB, AC, MC.

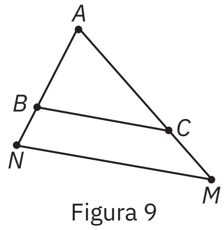


Figura 9

6. În triunghiul ABC, punctele E și F sunt pe laturile AB și AC, astfel încât $EF \parallel BC$. Dacă $AE = 2EB$, $AB = 12$ cm și $AC = 18$ cm, calculați AE, EB, AF și FC.

7. În triunghiul ABC, punctul M pe latura AB și punctul N pe latura AC, astfel încât $MN \parallel BC$. Dacă $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$ și $AN = 20$ cm, calculați NC și AC.

8. Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele M și N, $M \in AB$, $N \in BC$. Verificați dacă $MN \parallel AC$ în cazurile:

a. $AM = 8$ cm, $MB = 6$ cm, $BN = 12$ cm și $NC = 9$ cm;
b. $AM = 12$ cm, $AB = 16$ cm, $BN = 11$ cm și $NC = 33$ cm;
c. $MB = 15$ cm, $AB = 36$ cm, $BN = 10$ cm și $BC = 24$ cm;
d. $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{4}$, $BN = 6$ dm, $NC = 0{,}12$ dam.

9. Fie $ABCD$ un dreptunghi și E pe latura AB, astfel încât $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$. Dacă $EF \parallel BD$, $F \in AD$, iar $AD = 24$ cm, calculați AF și FD.

10. În trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB < CD$, se consideră M pe latura AD și $P \in BC$, astfel încât $\frac{AM}{MD} = \frac{3}{4}$ și $MP \parallel AB$. Se știe că $BC = 28$ cm, iar $AC \cap MP = \{N\}$.

a. Calculați raportul segmentelor AN și AC.
b. Determinați lungimile segmentelor BP și PC.

11. Se dă trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$. Se consideră punctele E și F, $E \in AD$, $F \in BC$, astfel încât $\frac{DE}{AE} = \frac{CF}{BF}$. Arătați că $EF \parallel AB$.

12. În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AC \cap BD = \{O\}$, $AC = 24$ cm, iar $\frac{BO}{OD} = \frac{3}{5}$. Calculați lungimile segmentelor AO și OC.

13. În Figura 10, $ABCD$ este romb, $EF \parallel AB$ și $EG \parallel BD$. Demonstrați că $\frac{AG}{AB} + \frac{DF}{BD} = 1$.

14. În Figura 11, segmentele BC și DE reprezintă două trambuline, fixate pe un stâlp, AD. Cele două trambuline sunt situate deasupra unui bazin de înot. Se știe că $AB = 4$ m și $BD = 6$ m, $BC \parallel DE$, iar distanța dintre punctele A și C este de 6 metri. Calculați distanța dintre punctele A și E, știind că punctele A, C și E sunt coliniare.

15. În Figura 12 sunt reprezentate schematic pozițiile locuințelor a cinci copii: Mihai, Adi, Rareș, Dana și Corina. Folosind distanțele prezentate în figură, arătați că Str. Lunii și Str. Unirii sunt paralele.

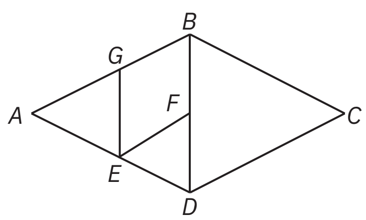


Figura 10

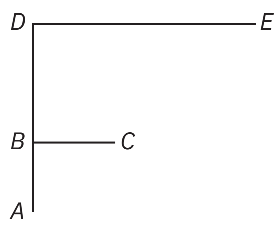


Figura 11

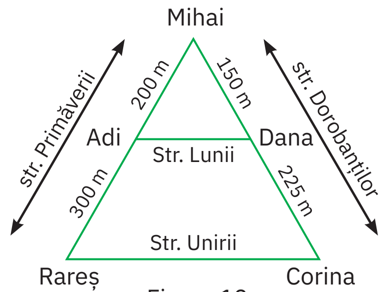


Figura 12

Minitest

1. Se consideră triunghiul ABC și punctele D și E pe laturile AB, respectiv AC, astfel încât $DE \parallel BC$. Dacă $AB = 12$ cm, $AE = 10$ cm și $EC = 6$ cm, calculați AD, DB și AC. **(3p)**

2. Se dă trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AC \cap BD = \{O\}$, $BD = 25$ cm, iar $\frac{AO}{OC} = \frac{2}{3}$.
Calculați lungimile segmentelor BO și OD. **(3p)**

3. În paralelogramul $ABCD$, fie $M \in BC$, $N \in BD$ și $P \in DC$, astfel încât $MN \parallel CD$ și $NP \parallel BC$.
Demonstrați că $\frac{BM}{BC} + \frac{DP}{DC} = 1$. **(3p)**

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

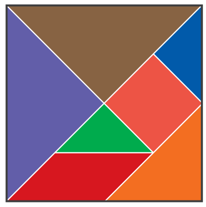
Lecția 3: Triunghiuri asemenea. Teorema fundamentală a asemănării

Cuvinte-cheie

asemănare | triunghiuri asemenea | segmente proporționale
figuri asemenea | raport de asemănare | teorema fundamentală a asemănării

Triunghiuri asemenea

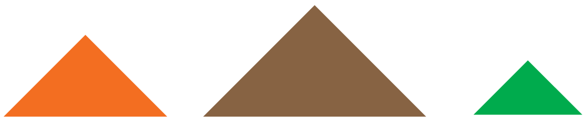
Mate practică



Tangram este un joc foarte vechi de puzzle, de origine chinezească, format din șapte piese, numite *tan*-uri (cinci triunghiuri dreptunghice isoscele, un pătrat și un paralelogram), cu ajutorul cărora se pot forma diferite figuri. Dina, Vlad și Eliza analizează piesele:

Dina: Triunghiul verde este congruent cu cel albastru, iar cel mov este congruent cu triunghiul maro.

Eliza: Deși nu sunt toate identice, triunghiurile au o formă asemănătoare.



Vlad: După cum văd eu lucrurile, există o formă comună care a fost mărită sau micșorată de un anumit număr de ori, pentru a produce aceste triunghiuri. E la fel ca funcția zoom a aparatului foto sau ca la microscop.

Eliza: Tehnica de care vorbești se numește scalare. Numărul care îți arată de câte ori mărești sau micșorezi o imagine se numește factor de scalare. Dacă acest factor este subunitar, micșorezi imaginea. Când este supraunitar, o mărești.

Dina: Am o versiune a aceluiași joc, cu mai multe forme. Să vă arăt câteva tipuri de piese:

Eliza: Piesele colorate la fel au aceeași formă. Dar, deși toate pătratele *seamănă* între ele, acest lucru nu este valabil pentru toate dreptunghiurile sau pentru toate triunghiurile. Mai exact, nu toate triunghiurile (sau dreptunghiurile) se pot obține mărind sau micșorând o formă comună.

Ce observăm?

În cazul figurilor de mai sus colorate la fel, raportul lungimilor laturilor și măsura unghiurilor se păstrează de la o formă la alta. Vom spune că acestea sunt *figuri asemenea*.

Intuitiv, orice două triunghiuri dreptunghice isoscele sunt asemenea, dar două triunghiuri dreptunghice oarecare nu sunt neapărat asemenea. La fel, orice două pătrate sunt asemenea, dar nu orice două dreptunghiuri sunt asemenea.

Păstrând această perspectivă, în cele ce urmează ne vom ocupa de studiul triunghiurilor.

De reținut

Definiție. Două triunghiuri se numesc *asemenea* dacă unghiurile unuia dintre triunghiuri sunt respectiv congruente cu unghiurile celuilalt triunghi, iar laturile opuse unghiurilor congruente sunt respectiv proporționale.

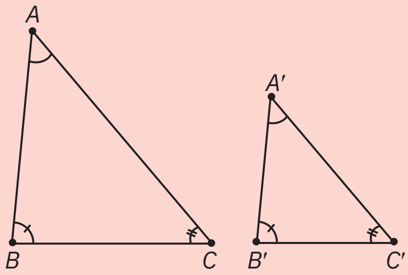
Dacă triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt asemenea, notăm:

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'.$$

Conform definiției, au loc relațiile:

$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$ și $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$.

Valoarea comună a celor trei rapoarte se numește *raportul de asemănare* al triunghiurilor ABC și $A'B'C'$.



Exemple

În figurile 1 și 2 sunt reprezentate perechi de triunghiuri asemenea. Utilizând definiția, din fiecare triunghi putem determina elementele necunoscute (lungimi de laturi sau măsuri de unghiuri).

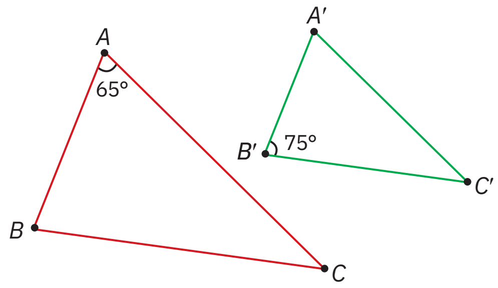


Figura 1

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \begin{cases} \sphericalangle A = \sphericalangle A' = 65° \\ \sphericalangle B = \sphericalangle B' = 75° \end{cases}$

$\sphericalangle C = \sphericalangle C' = 180° - (\sphericalangle A' + \sphericalangle B') = 40°$

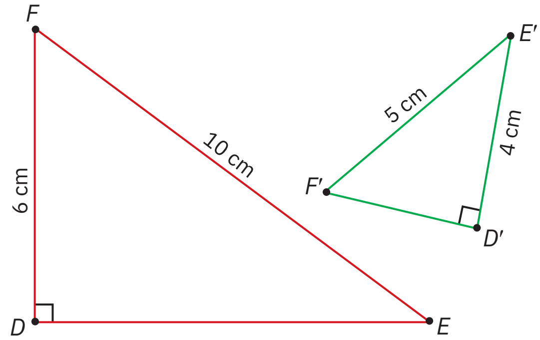


Figura 2

$\Delta DEF \sim \Delta D'E'F' \Rightarrow \dfrac{DE}{D'E'} = \dfrac{DF}{D'F'} = \dfrac{EF}{E'F'}$

$\dfrac{EF}{E'F'} = 2 \Rightarrow \begin{cases} DE = 8 \text{ cm} \\ D'F' = 3 \text{ cm} \end{cases}$

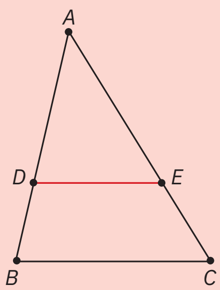
Proprietăți ale relației de asemănare a două triunghiuri

1. Orice triunghi este asemenea cu el însuși: $\Delta ABC \sim \Delta ABC$.
2. Dacă un triunghi este asemenea cu un al doilea triunghi, atunci și cel de al doilea triunghi este asemenea cu primul: dacă $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, atunci $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$.
3. Două triunghiuri care sunt, fiecare, asemenea cu un al treilea triunghi sunt asemenea între ele: dacă $\Delta ABC \sim \Delta A''B''C''$ și $\Delta A'B'C' \sim \Delta A''B''C''$, atunci $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.
4. Orice două triunghiuri congruente sunt asemenea (având raportul de asemănare egal cu 1): dacă $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$, atunci $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

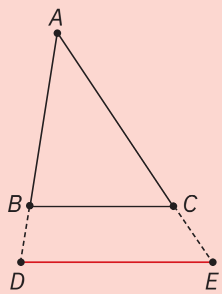
De reținut

Teorema fundamentală a asemănării

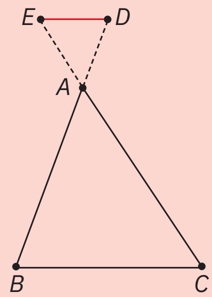
O paralelă dusă la una dintre laturile unui triunghi formează cu celelalte două laturi (sau cu prelungirile acestora) un triunghi asemenea cu cel dat.



$DE \parallel BC \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC$



$DE \parallel BC \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC$



$DE \parallel BC \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC$

Demonstrație:

Vom face demonstrația doar pentru cazul în care D se află pe segmentul AB.

Trebuie să arătăm că $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ABC$, $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle ACB$ și $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$.

Unghiurile DAE și BAC coincid, deci $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle BAC$. Apoi, din $DE \parallel BC$, rezultă $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle ACB$ (unghiuri corespondente).

Teorema lui Thales, aplicată în triunghiul ABC, arată că $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (Figura 3).

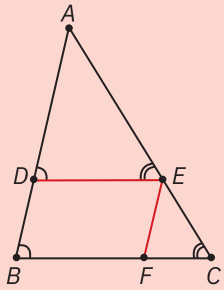


Figura 3

Pentru a demonstra că $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$, construim paralela prin E la AB, care intersectează latura BC în F. Întrucât $EF \parallel AB$, aplicând încă o dată teorema lui Thales, obținem $\frac{EC}{EA} = \frac{FC}{FB}$.

Folosind proporții derivate, avem $\frac{EC+EA}{EA} = \frac{FC+FB}{FB}$, adică $\frac{AC}{EA} = \frac{BC}{FB}$ sau $\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$.

Patrulaterul $DEFB$ este paralelogram, deci $DE = BF$, iar relația anterioară devine $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$, ceea ce trebuia demonstrat.

Portofoliu

Demonstrează teorema de mai sus pentru celelalte două cazuri.

În demonstrație poți folosi:

- proprietățile unghiurilor formate de două drepte paralele cu o secantă, pentru a demonstra congruențele de unghiuri $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle B$ și $\sphericalangle E \equiv \sphericalangle C$;
- teorema lui Thales și justificări asemănătoare demonstrației din cazul 1, pentru a demonstra cazul 2;
- construcția simetricelor D' și E' ale punctelor D și E față de punctul A, urmată de compararea triunghiurilor $AD'E'$ și ABC, pentru a demonstra cazul 3.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Fie punctele D și E pe laturile AB, respectiv AC ale triunghiului ABC, astfel încât dreptele DE și BC sunt paralele. Știind că $AB = 18$ cm, $DB = 12$ cm, $DE = 4$ cm și $AE = 9$ cm, determinați lungimile segmentelor AD, BC și EC.

Rezolvare:

Cum $DE \parallel AB$, cu teorema fundamentală a asemănării avem $\Delta ADE \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$.

Dar $AD = AB - DB = 6$ cm, deci $\frac{6}{18} = \frac{4}{BC} = \frac{9}{AC}$, de unde $BC = \frac{18 \cdot 4}{6} = 12$ cm, $AC = \frac{9 \cdot 18}{6} = 27$ cm și $EC = AC - AE = 18$ cm.

2. În Figura 4, dreapta DE este paralelă cu AB, iar dreapta DF este paralelă cu BC.

Demonstrați că $\frac{DE}{AB} + \frac{DF}{BC} = 1$.

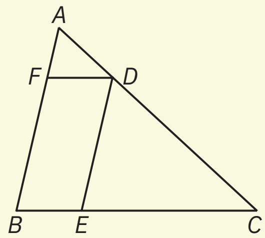


Figura 4

Rezolvare:

Aplicăm teorema fundamentală a asemănării:

$$DE \parallel AB \Rightarrow \Delta CDE \sim \Delta CAB \Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{CD}{CA} \quad (1);$$

$$FD \parallel BC \Rightarrow \Delta AFD \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{DF}{BC} = \frac{AD}{CA} \quad (2).$$

Adunând relațiile (1) și (2) obținem: $\frac{DE}{AB} + \frac{DF}{BC} = \frac{CD}{CA} + \frac{AD}{CA} = \frac{CD+AD}{CA} = \frac{AC}{AC} = 1$.

6.3

Probleme propuse

1. Se consideră triunghiurile ABC și DEF, astfel încât $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. Se știe că $\sphericalangle A = 45°$ și $\sphericalangle B = 50°$. Determinați $\sphericalangle C$, $\sphericalangle E$, $\sphericalangle D$ și $\sphericalangle F$.
2. În Figura 5, triunghiurile ABC și DEF sunt asemenea. Determinați x și y.
3. Se consideră triunghiurile ABC și MNP, astfel încât $\Delta ABC \sim \Delta MNP$. Se cunosc $AB = 6$ cm, $BC = 9$ cm, iar $\frac{AB}{MN} = 3$. Calculați MN și NP.
4. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, $AB = 7$ cm, $AC = 9$ cm, $MN = 21$ cm și $NP = 36$ cm, determinați perimetrele celor două triunghiuri.
5. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $AB = 10$ cm, $AC = 6$ cm, $DF = 12$ cm și $\sphericalangle A = 64°$, determinați DE și $\sphericalangle D$.

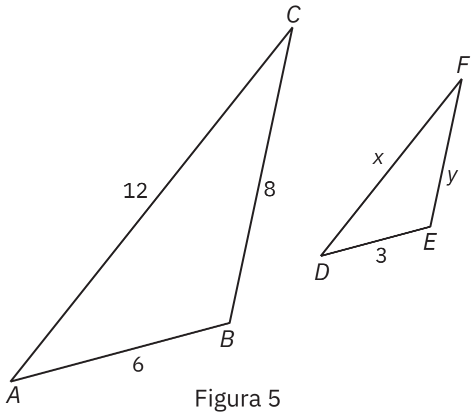


Figura 5

6. În triunghiul ABC, se consideră punctele D și E pe laturile AB, respectiv AC, astfel încât $DE \parallel BC$.
   a. Dacă $AB = 15$ cm, $BC = 18$ cm, $AC = 21$ cm și $BD = 10$ cm, calculați AD, AE, EC și DE.
   b. Dacă $DE = 12$ cm, $AB = 20$ cm, $BC = 15$ cm și $AC = 30$ cm, calculați AD, DB, AE și EC.
   c. Dacă $AB = 16$ cm, $BC = 20$ cm, $AC = 24$ cm și $AE = 18$ cm, calculați AD, DB, EC și DE.
7. În triunghiul ABC fie punctele D și E pe laturile AB, respectiv AC, astfel încât $DE \parallel BC$. Știind că $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{5}$, $AE = 4$ cm, $AB = 20$ cm și $BC = 15$ cm, determinați AD, DB, EC, AC și DE.
8. Triunghiul ABC are proprietatea $\Delta ABC \sim \Delta BCA$. Stabiliți natura triunghiului ABC.
9. Trapezul $ABCD$ are $AB \parallel CD$, $AB = 30$ cm, $BC = 20$ cm, $CD = 10$ cm și $AD = 14$ cm. Dacă $AD \cap BC = \{M\}$, calculați perimetrul triunghiului MAB.
10. Folosind indicațiile din Figura 6, determinați:
    a. distanțele pe care le au de parcurs Dina și Eliza până la școală;
    b. distanța dintre locuințele lui Vlad și a Dinei.

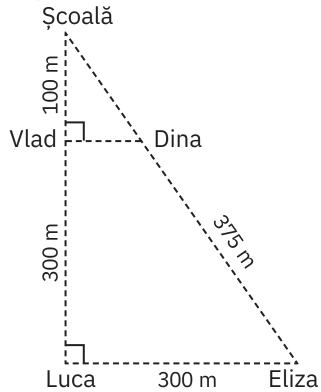


Figura 6

Cultură matematică

Legenda jocului TANGRAM

Se zice că în urmă cu mulți ani, în timpuri aproape imemoriale, trăia în China un anume Tan, al cărui singur bun de preț era o bucată frumoasă de ceramică. Vrând să o arate împăratului, Tan a pornit la drum, dar, din nefericire, s-a împiedicat, iar bucata de ceramică s-a spart în șapte forme geometrice: două triunghiuri mai mari, unul de mărime medie, două triunghiuri mai mici, un pătrat și un paralelogram. Încercând din răsputeri să le reașeze în forma inițială, Tan era urmărit de ghinion, de vreme ce-i ieșea ba un câine, ba o pasăre, ba o femeie care dansa. Uimit peste măsură de descoperirea sa, Tan a ajuns în cele din urmă să i-o prezinte împăratului sub formă de joc.

Autoevaluare

1. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $AB = 20$ cm, $AC = 12$ cm, $DF = 24$ cm și $\sphericalangle B = 52°$, determinați DE și $\sphericalangle E$. **(3p)**
2. În triunghiul ABC, se consideră punctul D pe latura AB și punctul E pe latura AC, astfel încât $DE \parallel BC$. Dacă $AC = 12$ cm, $AD = 6$ cm, $AE = 9$ cm și $DE = 12$ cm, calculați EC, DB, AB și BC. **(3p)**
3. În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, avem $AB = 35$ cm, $CD = 10$ cm, $AC = 18$ cm și $BD = 27$ cm. Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, calculați AO, OC, BO și OD. **(3p)**

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Lecția 4: Criterii de asemănare a triunghiurilor. Aproximarea în practică a distanțelor folosind asemănarea

Cuvinte-cheie

criterii de asemănare · unghi – unghi (U.U.) · latură – unghi – latură (L.U.L.)
raport de asemănare · latură – latură – latură (L.L.L.)

Criterii de asemănare a triunghiurilor

Mate practică

Realizați din carton, în două moduri, piesa de puzzle din Figura 1.

A. Construiți triunghiul mare și decupați din el triunghiul mic, având grijă ca dimensiunile să fie cele indicate, iar laturile care nu sunt orizontale ale celor două triunghiuri să fie respectiv paralele.

B. Realizați mai întâi un șablon din carton, pe care îl veți folosi mai apoi pentru a decupa triunghiul mic din triunghiul mare. Pentru a realiza șablonul, procedați astfel: construiți mai întâi triunghiul ABC, apoi alegeți punctul M pe latura AB, astfel încât $AM = 3{,}2$ cm. Ducând o paralelă prin M la BC, din teorema fundamentală a asemănării se obține un triunghi AMN, asemenea cu triunghiul ABC. Cum $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, știm unde să alegem punctul N pe latura AC, astfel încât $AN = 4$. Acesta este șablonul nostru.

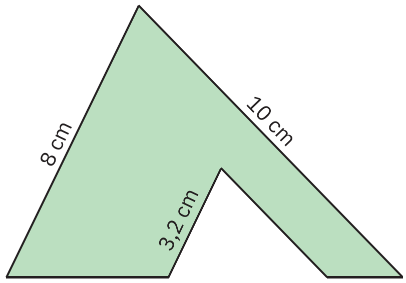


Figura 1

Construim din carton triunghiul mare, pe care îl denumim tot ABC. Este suficient să deplasăm șablonul astfel încât dreapta MN să coincidă cu dreapta BC și să respectăm distanța de 2 cm din figură. Apoi nu ne mai rămâne decât să decupăm triunghiul mic (Figura 2).

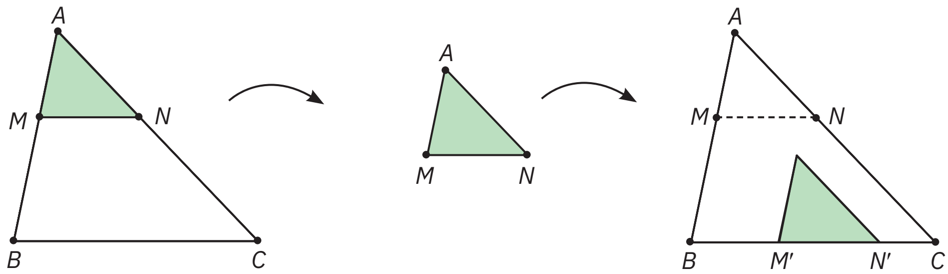


Figura 2

Ce observăm?

Realizarea șablonului AMN se bazează pe construcția triunghiului ABC; în situația descrisă mai sus am utilizat cazul de construcție latură – unghi – latură (L.U.L.).

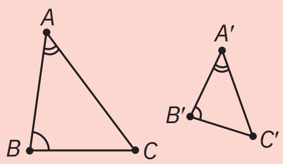
Folosind teorema fundamentală a asemănării, este evident că, odată construit un triunghi, putem crea oricâte triunghiuri asemenea cu acesta. În clasa a VI-a am stabilit o legătură între cazurile de construcție și cazurile de congruență a triunghiurilor. Se poate pune întrebarea dacă există o legătură similară între construcția și asemănarea triunghiurilor.

Reamintim că o corespondență între două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ este precizată de ordinea în care sunt scrise vârfurile. Astfel, vârfului A îi corespunde vârful A', vârfului B îi corespunde B', vârfului C îi corespunde C', iar laturile corespondente (sau omoloage) se opun vârfurilor corespondente (omoloage).

De reținut

Criteriul de asemănare unghi – unghi (U.U.)

Două triunghiuri cu două perechi de unghiuri omoloage congruente sunt asemenea.

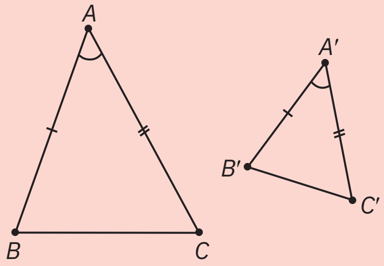


Ipoteză: ΔABC, $\Delta A'B'C'$
$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$

Concluzie: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Criteriul de asemănare latură – unghi – latură (L.U.L.)

Două triunghiuri cu două perechi de laturi omoloage proporționale și unghiurile dintre ele congruente sunt asemenea.



Ipoteză: ΔABC, $\Delta A'B'C'$

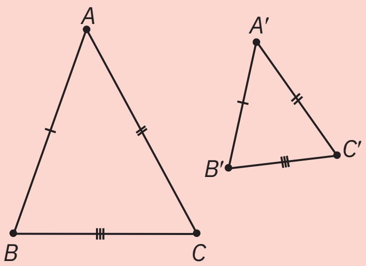
$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$

$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$

Concluzie: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Criteriul de asemănare latură – latură – latură (L.L.L.)

Două triunghiuri sunt asemenea dacă au laturile omoloage proporționale.



Ipoteză: ΔABC, $\Delta A'B'C'$

$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$

Concluzie: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Demonstrație:

Pe semidreapta AB considerăm punctul D astfel încât $[AD] \equiv [A'B']$, apoi construim paralela prin D la BC și notăm cu E intersecția acesteia cu dreapta AC (Figura 3).

Cum $DE \parallel BC$, din teorema fundamentală a asemănării rezultă $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

Folosind ipotezele fiecărui criteriu, vom arăta, de fiecare dată, că triunghiurile ADE și $A'B'C'$ sunt congruente, suficient pentru a deduce că $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

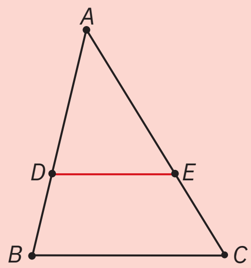


Figura 3

Cazul 1 (criteriul U.U.)

Unghiurile ADE și ABC sunt omoloage, deci $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$. Întrucât $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle B'A'C'$ și $AD = A'B'$, rezultă că $\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$ (cazul de congruență U.L.U.).

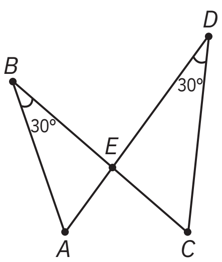
Cazul 2 (criteriul L.U.L.)

Cum $DE \parallel BC$, aplicând teorema lui Thales, obținem $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$. Întrucât $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ și $AD = A'B'$, obținem $AE = A'C'$, de unde rezultă că $\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$ (cazul de congruență L.U.L.).

Cazul 3 (criteriul L.L.L.)

Relația $\Delta ABC \sim \Delta ADE$, obținută anterior, arată că $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{BC}{DE}$. Dar $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$ și $AD = A'B'$, de unde $AE = A'C'$ și $DE = B'C'$, deci $\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$ (cazul de congruență L.L.L.).

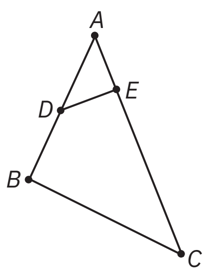
Exemple



$\sphericalangle ABE \equiv \sphericalangle CDE$ (au câte 30°)

$\sphericalangle AEB \equiv \sphericalangle CED$ (opuse la vârf)

$\Delta AEB \sim \Delta CED$ (cazul U.U.)



$AB = 6$ cm

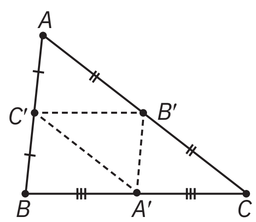
$AC = 9$ cm

$AD = 3$ cm

$AE = 2$ cm

$\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AE}{AB}$, $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle CAB$

$\Delta ADE \sim \Delta ACB$ (cazul L.U.L.)



$\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{1}{2}$

$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ (cazul L.L.L.)

Observații

1. Raportul înălțimilor, medianelor și bisectoarelor în triunghiuri asemenea

Raportul lungimilor înălțimilor, bisectoarelor și medianelor ce pornesc din vârfurile omoloage a două triunghiuri asemenea este egal cu raportul de asemănare al celor două triunghiuri.

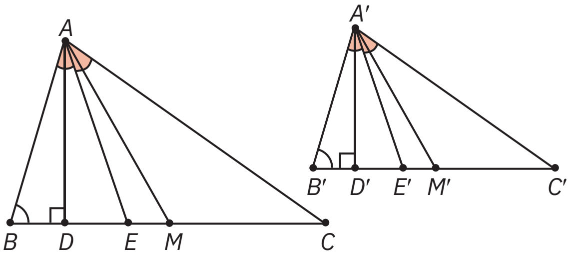


Figura 4

Ipoteză: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$; $\dfrac{AB}{A'B'} = k$

AD, $A'D'$ înălțimi

AE, $A'E'$ bisectoare

AM, $A'M'$ mediane

Concluzie: $\dfrac{AD}{A'D'} = \dfrac{AE}{A'E'} = \dfrac{AM}{A'M'} = k$

Demonstrație:

Din asemănarea triunghiurilor ABC și $A'B'C'$ rezultă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$ și $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = k$ (Figura 4).

- Triunghiurile ABD și $A'B'D'$ sunt dreptunghice, cu $\sphericalangle D = \sphericalangle D' = 90°$. Întrucât $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle A'B'D'$, rezultă $\Delta ABD \sim \Delta A'B'D'$ (cazul U.U.). Ca urmare, $\dfrac{AD}{A'D'} = \dfrac{AB}{A'B'} = k$.
- Unghiurile BAE și $B'A'E'$ sunt congruente, deoarece măsurile lor sunt jumătate din măsurile unghiurilor congruente BAC și $B'A'C'$. Cum $\sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle B'A'E'$ și $\sphericalangle ABE \equiv \sphericalangle A'B'E'$, obținem $\Delta ABE \sim \Delta A'B'E'$ (cazul U.U.), de unde rezultă că $\dfrac{AE}{A'E'} = \dfrac{AB}{A'B'} = k$.
- Din relațiile $BM = \dfrac{1}{2}BC$ și $B'M' = \dfrac{1}{2}B'C'$ rezultă $\dfrac{BM}{B'M'} = \dfrac{BC}{B'C'} = k$. În triunghiurile ABM și $A'B'M'$ avem $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle A'B'M'$ și $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BM}{B'M'} = k$, de unde obținem $\Delta ABM \sim \Delta A'B'M'$ (cazul L.U.L.).

În consecință, $\dfrac{AM}{A'M'} = \dfrac{AB}{A'B'} = k$.

2. Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea

Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.

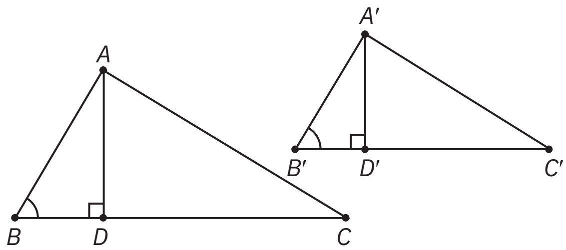


Figura 5

Ipoteză: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$; $\dfrac{AB}{A'B'} = k$

Concluzie: $\dfrac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{A'B'C'}} = k^2$

Demonstrație:

Construind înălțimile $AD \perp BC$ și $A'D' \perp B'C'$, rezultă $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{AD \cdot BC}{2}$ și $\mathcal{A}_{A'B'C'} = \dfrac{A'D' \cdot B'C'}{2}$ (Figura 5).

Întrucât raportul lungimilor înălțimilor este egal cu raportul de asemănare, deducem că:

$$\frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{A'B'C'}} = \frac{AD \cdot BC}{A'D' \cdot B'C'} = \frac{AD}{A'D'} \cdot \frac{BC}{B'C'} = k \cdot k = k^2.$$

Aproximarea în practică a distanțelor folosind asemănarea triunghiurilor

Problemele practice din viața cotidiană impun deseori măsurarea distanței dintre două puncte. Situația concretă, din teren, poate face dificilă măsurarea directă a acestor distanțe, ca, de exemplu, atunci când trebuie să măsurăm înălțimea unui copac sau a unei clădiri, sau să determinăm distanța dintre două puncte inaccesibile etc. În problemele următoare, vom utiliza noțiunile învățate în cadrul acestei unități, în special asemănarea triunghiurilor, pentru a determina astfel de distanțe.

6.4

Exemple

1. Măsurarea înălțimii unui copac

Considerăm că verticala care trece prin mijlocul tulpinii copacului intersectează solul în punctul A, iar vârful copacului în punctul X. Vom calcula cu aproximație înălțimea copacului, adică lungimea segmentului AX.

Într-un punct B, aflat la o distanță de a metri de A, fixăm un baston (reprezentat în Figura 6 prin segmentul BD) cu lungimea de b metri.

Ne deplasăm pe semidreapta $[AB$ până când, privind de la nivelul solului, punctele X, D, C sunt coliniare. Lungimea segmentului BC se poate măsura; notăm această lungime cu c.

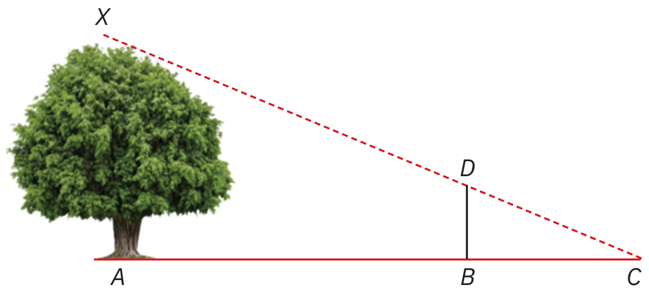


Figura 6

Din teorema fundamentală a asemănării obținem $\Delta CBD \sim \Delta CAX$, de unde $\frac{BD}{AX} = \frac{CB}{CA}$.

Rezultă că înălțimea copacului este egală cu $AX = \frac{BD \cdot AC}{BC} = \frac{b \cdot (a+c)}{c}$.

De exemplu, dacă fixăm $AB = a = 6$ m, $BD = b = 1$ m, iar în urma măsurătorii făcute găsim $BC = 1{,}5$ m, înălțimea copacului este 5 m.

2. Determinarea distanței dintre două puncte aflate de o parte și de alta a unui lac

În Figura 7, punctul Q (casa) și punctul P (pomul) se află de o parte și de alta a unui lac.

Pentru a determina distanța dintre casă și pom, fixăm un punct O din care se văd cele două puncte și măsurăm distanțele $OP = u$ și $OQ = v$.

Considerăm un număr pozitiv $a < u$ și calculăm numărul $b = \frac{a \cdot v}{u}$; apoi alegem punctele A și B, aflate pe segmentele OP, respectiv OQ, astfel încât $OA = a$ și $OB = b$. În alegerea lui a vom avea grijă ca dreapta AB să nu „intersecteze" lacul. Măsurăm apoi distanța $AB = c$.

Figura 7

În condițiile de mai sus, avem $\frac{OA}{OP} = \frac{OB}{OQ}$ și, conform reciprocei teoremei lui Thales, rezultă $AB \parallel PQ$. Aplicând teorema fundamentală a asemănării, obținem $\Delta OAB \sim \Delta OPQ$, de unde:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{OA}{OP} \Rightarrow \frac{c}{PQ} = \frac{a}{u} \Rightarrow PQ = \frac{c \cdot u}{a}.$$

De exemplu, să presupunem că în urma măsurătorilor obținem $OP = u = 320$ m și $OQ = 200$ m.

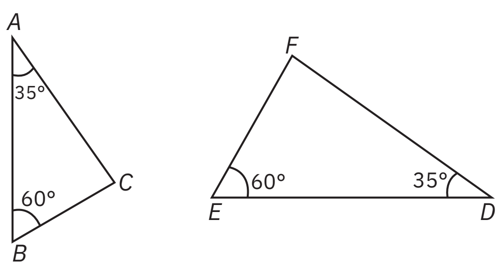
Alegem $a = 8$, pentru care găsim $b = 5$. Fixăm pe OP și OQ punctele A și B, astfel încât $OA = 8$ m și $OB = 5$ m, după care, măsurând distanța dintre A și B, obținem $AB = c = 2{,}5$ m.

Atunci distanța PQ dintre casă și pom este de 100 de metri.

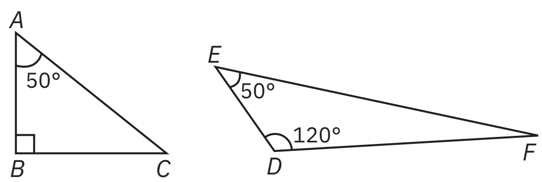
Probleme propuse

1. Se consideră triunghiurile ABC și DEF în situațiile a-d. Stabiliți în care dintre cazurile prezentate cele două triunghiuri sunt asemenea.

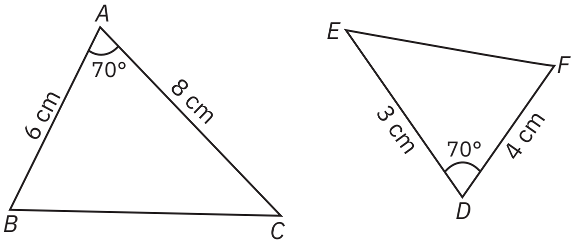
a.



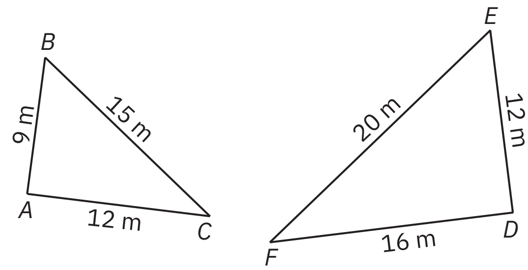
b.



c.



d.



2. Stabiliți dacă triunghiurile ABC și MNP sunt asemenea, în fiecare dintre următoarele situații:

a. $\sphericalangle A = 40°$, $\sphericalangle B = 62°$, $\sphericalangle M = 40°$, $\sphericalangle P = 78°$;

b. $\sphericalangle B = 75°$, $\sphericalangle C = 30°$, $\sphericalangle M = 50°$, $\sphericalangle P = 30°$;

c. $\sphericalangle A = 80°$, $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{AC}{MP}$, $\sphericalangle M = 80°$;

d. $AB = 10$ cm, $AC = 14$ cm, $BC = 12$ cm, $MN = 15$ cm, $MP = 21$ cm, $NP = 18$ cm.

3. Se consideră triunghiurile asemenea ABC și MNP. Se cunosc $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $BC = 9$ cm și $MP = 16$ cm.

a. Calculați MN și NP.

b. Determinați valoarea raportului de asemănare a celor două triunghiuri, notat k.

c. Arătați că $\dfrac{\mathcal{P}_{ABC}}{\mathcal{P}_{MNP}} = k$.

4. În triunghiul isoscel ABC, $AB = AC$, se știe că $\sphericalangle B = 72°$. Fie BD bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$, $D \in AC$. Arătați că $\Delta ABC \sim \Delta BDC$.

5. Se consideră triunghiurile isoscele ABC ($AB = AC$) și DEF ($DE = DF$). Dacă $\sphericalangle A = 64°$ și $\sphericalangle F = 58°$, demonstrați că $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

6. Se consideră triunghiurile echilaterale ABC și DEF. Demonstrați că $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

7. Se consideră triunghiurile dreptunghice ABC ($\sphericalangle A = 90°$) și DEF ($\sphericalangle D = 90°$). Se cunosc $AB = 6$ dm, $AC = 8$ dm, $DE = 1{,}8$ m și $DF = 2{,}4$ m.

a. Arătați că $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

b. Calculați ariile celor două triunghiuri.

c. Verificați prin calcul faptul că raportul ariilor celor două triunghiuri este egal cu pătratul raportului de asemănare.

8. În pătratul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$, considerăm punctele M și N pe segmentele AO, respectiv BO, astfel încât $AM = 2MO$ și $BO = 3NO$. Demonstrați că $\Delta OMN \sim \Delta OCD$.

9. Fie triunghiul ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$ și $AD \perp BC$. Demonstrați că:

a. $\Delta ABD \sim \Delta CAD$;

b. $\Delta ABD \sim \Delta CBA$;

c. $\Delta ADC \sim \Delta BAC$.

10. În trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, notăm $AC \cap BD = \{O\}$. Se dau $AC = 18$ cm, $AB = 24$ cm, iar $\dfrac{OD}{OB} = \dfrac{1}{3}$. Determinați lungimile segmentelor AO, OC și CD.

11. În triunghiul ABC, fie punctul M pe latura BC. Se construiesc $MN \parallel AC$ și $MP \parallel AB$, unde $N \in AB$, $P \in AC$.

a. Arătați că $\dfrac{AP}{AC} = \dfrac{BN}{AB}$.

b. Arătați că $\dfrac{AP}{AC} + \dfrac{AN}{AB} = 1$.

12. Pe laturile AC și AB ale unui triunghi ABC se consideră punctele D, respectiv E, astfel încât $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AE}{AB}$.

a. Arătați că $\Delta AED \sim \Delta ABC$.

b. Arătați că $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ACB$.

13. Fie P un punct pe latura BC a paralelogramului $ABCD$. Se notează $AP \cap DC = \{Q\}$ și $DP \cap AB = \{R\}$.

a. Demonstrați că $\Delta ABP \sim \Delta QCP$.

b. Demonstrați că $\Delta CDP \sim \Delta BRP$.

14. Dreptunghiul din Figura 8 reprezintă schița unei terase. Dimensiunile terasei sunt $AB = 12$ m și $BC = 18$ m. De asemenea, $AM = MB$ și $\sphericalangle MNB \equiv \sphericalangle DNC$. Arătați că $MN \perp ND$.

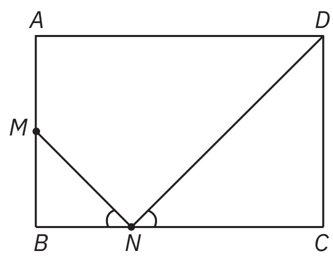


Figura 8

Recapitulare și evaluare

Asemănarea triunghiurilor
Segmente proporționale; teorema paralelelor echidistante • Teorema lui Thales; reciproca teoremei lui Thales; împărțirea unui segment în părți proporționale cu numere (segmente) date • Triunghiuri asemenea; teorema fundamentală a asemănării

Pentru exercițiile 1-22, notați în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect. Pentru exercițiile 23-30, scrieți rezolvările complete.

1. Dacă $AB = 4$ cm și $CD = 8$ cm, atunci $\frac{AB}{CD}$ este egal cu:

a. 2; **b.** 0,5; **c.** 4; **d.** 8.

2. Dacă $AB = 4$ dm și $CD = 8$ cm, atunci $\frac{AB}{CD}$ este egal cu:

a. 5; **b.** 0,5; **c.** 2; **d.** 0,2.

3. Dacă M este pe segmentul AB astfel încât $AM = \frac{1}{3} \cdot AB$, atunci $\frac{MB}{AB}$ este egal cu:

a. $\frac{3}{2}$; **b.** $\frac{2}{3}$; **c.** $\frac{1}{3}$; **d.** 3.

4. Dacă M este pe segmentul AB, $AB = 12$ cm și $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$, atunci lungimea segmentului MB este egală cu:

a. $\frac{1}{12}$ cm; **b.** $\frac{36}{5}$ cm; **c.** 8 cm; **d.** 4 cm.

5. Triunghiurile ABC și MPQ sunt asemenea. Dacă $\frac{AB}{MP} = \frac{2}{3}$, atunci raportul ariilor celor două triunghiuri este egal cu:

a. $\frac{2}{3}$; **b.** $\frac{4}{3}$; **c.** $\frac{2}{9}$; **d.** $\frac{4}{9}$.

6. În triunghiul ABC, MN este linie mijlocie, $MN \parallel BC$, $M \in AC$. Raportul de asemănare al triunghiurilor AMN și ABC este egal cu:

a. 2; **b.** 1; **c.** $\frac{1}{4}$; **d.** $\frac{1}{2}$.

7. Fie triunghiul ABC și punctele D și E pe laturile AB, respectiv AC, astfel încât $DE \parallel BC$. Dacă $BD = 4$ cm, $AE = 3$ cm și $EC = 6$ cm, atunci lungimea segmentului AD este egală cu:

a. 4 cm; **b.** 2 cm; **c.** 8 cm; **d.** 6 cm.

8. Fie triunghiul ABC și punctele D și E, pe laturile AB, respectiv AC, astfel încât $DE \parallel BC$. Dacă $BD = 8$ cm, $AD = 6$ cm și $AC = 21$ cm, atunci lungimea segmentului EC este egală cu:

a. 9 cm; **b.** 10 cm; **c.** 12 cm; **d.** 8 cm.

9. Fie triunghiul ABC și punctele D și E pe laturile AB, respectiv AC, astfel încât $DE \parallel BC$. Dacă $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm și $BD = 3$ cm, atunci lungimea segmentului AE este egală cu:

a. 10 cm; **b.** 4 cm; **c.** 12 cm; **d.** 9 cm.

10. Fie triunghiul ABC și punctele D și E pe laturile AB, respectiv AC, astfel încât DE paralelă cu BC. Dacă $AB = 16$ cm, $EC = 9$ cm și $AD = 4$ cm, atunci lungimea segmentului AC este egală cu:

a. 27 cm; **b.** 36 cm; **c.** 12 cm; **d.** 4 cm.

11. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta STN$, $AB = 8$ cm, $BC = 12$ cm și $ST = 4$ cm, atunci lungimea segmentului TN este egală cu:

a. 4 cm; **b.** 6 cm; **c.** 8 cm; **d.** 10 cm.

12. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $PQ = 6$ cm, $QR = 8$ cm, $PR = 10$ cm și $\mathcal{P}_{ABC} = 48$ cm. Lungimea segmentului AB este egală cu:

a. 10 cm; **b.** 8 cm; **c.** 12 cm; **d.** 6 cm.

13. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, $AB = 6$ cm, $MN = 4$ cm, $MP = 2$ cm și $NP = 6$ cm, atunci perimetrul triunghiului ABC este egal cu:

a. 12 cm; **b.** 16 cm; **c.** 18 cm; **d.** 20 cm.

14. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta STN$, $AB = 8$ cm și raportul de asemănare al celor două triunghiuri este 0,25, atunci lungimea segmentului ST este egală cu:

a. 4 cm; **b.** 6 cm; **c.** 8 cm; **d.** 10 cm.

15. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, $\sphericalangle A = 50°$ și $\sphericalangle P = 60°$, atunci măsura unghiului N este egală cu:

a. 50°; **b.** 60°; **c.** 70°; **d.** 110°.

16. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, $\sphericalangle A = 60°$ și $\sphericalangle B = 80°$, atunci măsura unghiului P este egală cu:

a. 40°; **b.** 60°; **c.** 80°; **d.** 140°.

17. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta MNP$ și $\frac{AB}{BC} = 4$, atunci valoarea raportului $\frac{MN}{NP}$ este egală cu:

a. 0,25; **b.** 4; **c.** 0,5; **d.** 2.

18. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, $\mathcal{P}_{ABC} = 27$ cm și $\mathcal{P}_{MNP} = 9$ cm, atunci valoarea raportului $\frac{AB}{MN}$ este egală cu:

a. 9; **b.** 3; **c.** 0,3; **d.** 1.

19. În trapezul $ABCD$, cu AB paralelă cu CD, $AC \cap BD = \{O\}$ și $\frac{AO}{AC} = \frac{3}{4}$. Valoarea raportului $\frac{DO}{BO}$ este egală cu:

a. $\frac{1}{3}$; **b.** $\frac{4}{3}$; **c.** $\frac{1}{4}$; **d.** $\frac{1}{2}$.

20. În trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AC \cap BD = \{O\}$ și $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{5}$. Valoarea raportului $\frac{AC}{OC}$ este egală cu:

a. $\frac{2}{5}$; **b.** $\frac{7}{5}$; **c.** 0,2; **d.** 1,2.

21. Se consideră punctul M, mijlocul laturii DC a paralelogramului $ABCD$. Dacă $AM \cap DB = \{P\}$, atunci raportul segmentelor DB și DP este:

a. 3; **b.** 2; **c.** 1; **d.** 4.

22. Se consideră trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 4$ cm, $CD = 12$ cm, $AD = 6$ cm și $AD \cap BC = \{M\}$. Lungimea segmentului MA este egală cu:

a. 3 cm; **b.** 12 cm; **c.** 6 cm; **d.** 4 cm.

23. Precizați care dintre enunțurile de mai jos este adevărat (A) și care este fals (F):

a. Orice două triunghiuri dreptunghice isoscele sunt asemenea.

b. Raportul perimetrelor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.

c. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta ACB$, atunci triunghiul ABC este isoscel.

d. Două triunghiuri asemenea cu un al treilea triunghi sunt asemenea între ele.

24. Se consideră triunghiurile asemenea ABC și MPQ. Asociați fiecărui set de relații denumirea corespunzătoare a cazului de asemănare.

A	B
$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle Q$	L.U.L.
$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$, $\frac{AB}{MP} = \frac{AC}{MQ}$	L.L.L.
	U.U.
$\frac{AB}{MP} = \frac{AC}{MQ} = \frac{BC}{PQ}$	U.L.U.

25. În triunghiul ABC, $DE \parallel BC$, cu D și E pe laturile AB, respectiv AC. Determinați numerele a, b, c și d din tabelul de mai jos, știind că datele de pe linii se referă la poziții diferite ale punctului D.

$AD = 4$	$DB = 10$	$AE = 15$	$EC = a$
$AC = b$	$DE = 9$	$BC = 12$	$AE = 6$
$AB = 20$	$AE = 9$	$DB = c$	$EC = 3$
$DB = 5$	$AB = d$	$DE = 6$	$BC = 18$

26. Fie triunghiurile asemenea ABC și MNP. Determinați numerele a, b, c și d care verifică egalitățile din tabelul de mai jos.

Dacă $\frac{AB}{MN} = 11$, atunci $\frac{AC}{MP} = a$.
Dacă $3 \cdot AB = 7 \cdot MN$, atunci $\frac{BC}{NP} = b + 1$.
Dacă $MN = 1{,}25 \cdot AB$, atunci $\frac{MP}{AC} = c + 2$.

27. Se consideră triunghiul ABC și punctele D, E și F pe laturile AB, BC, respectiv AC, astfel încât $DF \parallel BC$ și $DE \parallel AC$.

a. Dacă $5BE = 2BC$, calculați raportul segmentelor AF și FC.

b. Dacă $AF = 7$ cm, $FC = 5$ cm, $EC = 14$ cm, atunci calculați lungimea segmentului BE.

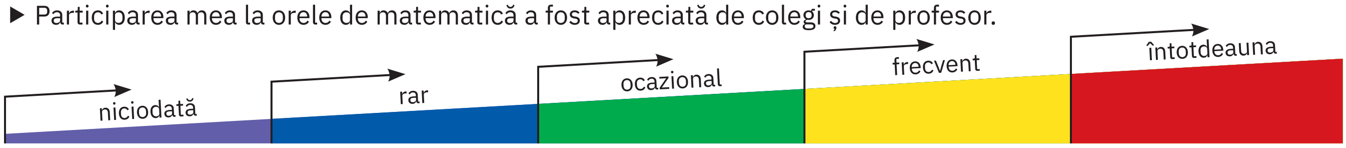
28. În triunghiul ABC se construiesc $AB \parallel FH \parallel DE$, cu F, D pe latura AC, H, E pe latura BC și F pe segmentul AD. Știind că $AC = 30$ cm, $BH = 4$ cm, $HE = 6$ cm și $EC = 2$ cm, determinați lungimile segmentelor AF, FD și DC.

29. În triunghiul ABC, fie punctele M, N, P pe laturile BC, AB, respectiv AC, astfel încât $BM = \frac{2}{5}BC$, $AN = \frac{2}{3}NB$ și $PC = \frac{3}{5}AC$. Arătați că patrulaterul $BMPN$ este paralelogram.

30. În triunghiul ABC, se consideră punctul M pe latura BC. Prin B și C se duc paralele la AM care intersectează AC și AB, în punctele E și respectiv F. Demonstrați că $\frac{AB}{BF} + \frac{AC}{CE} = 1$.

Fișa de observare sistematică

- ▶ Am fost preocupat să aflu lucruri noi despre metodele de rezolvare a problemelor.
- ▶ Participarea mea la orele de matematică a fost apreciată de colegi și de profesor.



U7 Relații metrice în triunghiul dreptunghic

Aplicarea teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic îi ajută pe ingineri și arhitecți atunci când proiectează poduri și clădiri. Această teoremă este utilă în navigația bidimensională, pentru determinarea celei mai scurte distanțe, dar și în supravegherea pantelor abrupte ale munților sau dealurilor.

7.1

Lecția 1: Proiecții ortogonale pe o dreaptă. Teorema înălțimii

Cuvinte-cheie

proiecție   catetă   medie proporțională   înălțime   ipotenuză   medie geometrică

Proiecții ortogonale pe o dreaptă

Mate practică

Raza de lumină a unei lanterne cade perpendicular pe un perete.
O minge care trece prin raza lanternei produce o umbră pe perete.

Ce observăm?

Linia imaginară dintre minge și umbra sa este perpendiculară pe perete.

Reprezentând schematic mingea prin punctul A și peretele prin dreapta d (Figura 1), umbra este punctul A', ce aparține dreptei, cu proprietatea $AA' \perp d$. Ne reamintim, din clasa a VI-a, că A' este *piciorul perpendicularei* duse din punctul A pe dreapta d.

Vom spune că A' este proiecția ortogonală a punctului A pe dreapta d.

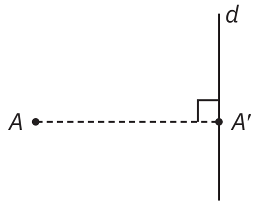


Figura 1

De reținut

Definiție. Proiecția ortogonală a unui punct pe o dreaptă este piciorul perpendicularei duse din acel punct pe dreaptă.

Prin convenție, un punct aflat pe o dreaptă este propria sa proiecție pe acea dreaptă.

În Figura 2, punctul M' este proiecția punctului M pe dreapta d, iar proiecția punctului N, aflat pe dreapta d, coincide cu N. Scriem: $M' = \text{pr}_d M$, respectiv $N = \text{pr}_d N$.

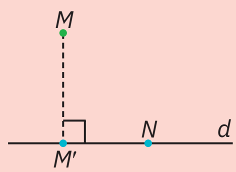
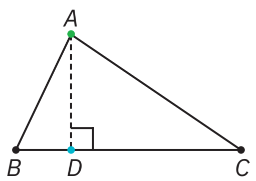
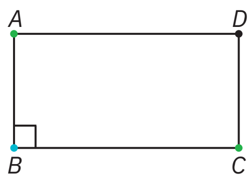


Figura 2

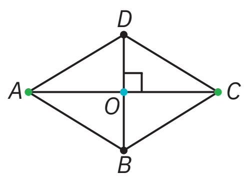
Exemple



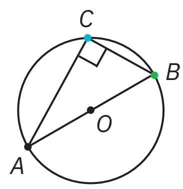
AD înălțime în $\Delta ABC \Rightarrow$
$\Rightarrow D = \text{pr}_{BC} A$



$ABCD$ dreptunghi $\Rightarrow$
$\Rightarrow B = \text{pr}_{BC} A = \text{pr}_{AB} C$



$ABCD$ romb de centru $O \Rightarrow$
$\Rightarrow O = \text{pr}_{AC} B = \text{pr}_{BD} A$

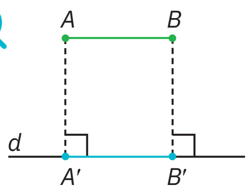


$A, B, C \in \mathcal{C}(O, r)$,
AB diametru $\Rightarrow C = \text{pr}_{AC} B$

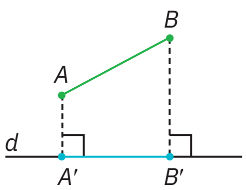
Proiecția unui segment pe o dreaptă

Proiecția (ortogonală) a unui segment pe o dreaptă este un segment sau un punct.
Lungimea proiecției unui segment pe o dreaptă este cel mult egală cu lungimea segmentului proiectat.

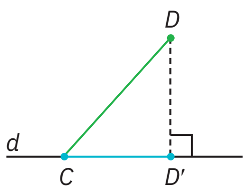
Exemple



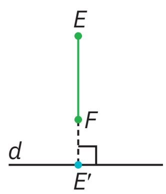
$A'B' = \text{pr}_d AB$
$AB \parallel d \Rightarrow A'B' = AB$



$A'B' = \text{pr}_d AB$
$AB \nparallel d \Rightarrow A'B' < AB$



$CD' = \text{pr}_d CD$
$C \in d \Rightarrow CD' < CD$



$EF \perp d \Rightarrow \text{pr}_d EF = \{E'\}$

Proiecția mijlocului unui segment

Dacă proiecția segmentului AB pe dreapta d este segmentul $A'B'$, atunci proiecția mijlocului segmentului AB este mijlocul segmentului $A'B'$ (Figurile 3-4).

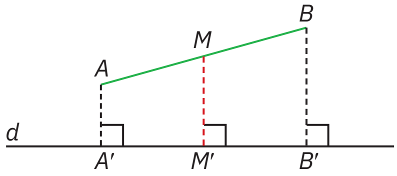


Figura 3

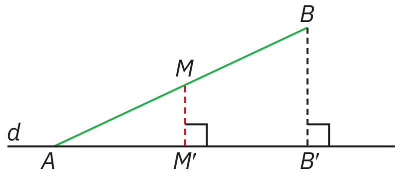


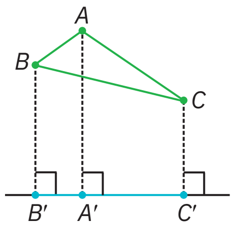
Figura 4

De reținut

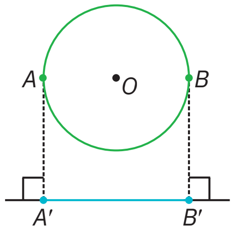
Proiecția ortogonală a unei figuri geometrice sau a unei mulțimi de puncte pe o dreaptă se determină proiectând toate punctele figurii, respectiv ale mulțimii date, pe acea dreaptă.

Exemple

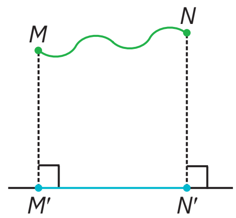
- proiecția unui triunghi pe o dreaptă



- proiecția unui cerc pe o dreaptă



- proiecția unei figuri neregulate pe o dreaptă



Teorema înălțimii

Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și înălțimea sa AD, $D \in BC$ (Figura 5).
Deoarece D este proiecția punctului A pe dreapta BC, constatăm că:
- proiecția catetei AB pe ipotenuza BC este segmentul BD;
- proiecția catetei AC pe ipotenuza BC este segmentul CD.

În aceste condiții, are loc rezultatul prezentat mai jos.

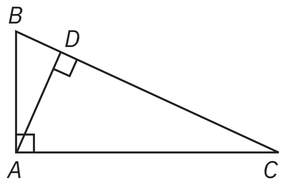
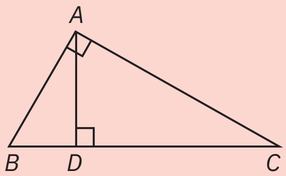


Figura 5

De reținut

Teorema înălțimii

Într-un triunghi dreptunghic, pătratul lungimii înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este egal cu produsul lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.



Ipoteză: ΔABC, $\sphericalangle A = 90°$,
$AD \perp BC$, $D \in BC$

Concluzie: $AD^2 = BD \cdot CD$

Demonstrație:
Unghiurile ABD și CAD sunt congruente, deoarece au același complement (unghiul BAD):

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle ABD + \sphericalangle BAD = 90° \\ \sphericalangle CAD + \sphericalangle BAD = 90°\end{array}\right| \Rightarrow \sphericalangle ABD = \sphericalangle CAD.$$

În triunghiurile ABD și CAD avem: $\left\{\begin{array}{l}\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CAD \\ \sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CDA\end{array}\right. \Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta CAD.$

Atunci $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{BD}{AD}$, de unde rezultă $AD^2 = BD \cdot CD$, ceea ce trebuia demonstrat.

Concluzia teoremei înălțimii se poate scrie sub una dintre formele $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{BD}{AD}$ sau $AD = \sqrt{BD \cdot CD}$, ceea ce arată că AD este media proporțională (sau media geometrică) a lungimilor segmentelor BD și CD.

Astfel, putem spune că, într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este media geometrică a lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

Exemplu

În Figura 6, triunghiul ABC este dreptunghic în A.
Înălțimea AD determină pe ipotenuză segmentele $BD = 4$ cm și $CD = 9$ cm.
Atunci $AD^2 = BD \cdot CD = 36 \text{ cm}^2$, de unde obținem $AD = 6$ cm.

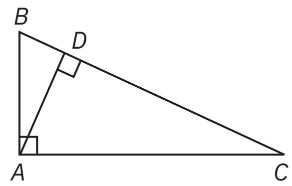


Figura 6

Observație

În aplicații este util, deseori, următorul rezultat:

- Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este raportul dintre produsul lungimilor catetelor și lungimea ipotenuzei.

Într-adevăr, cu notațiile din Figura 6, calculând aria triunghiului dreptunghic ABC în două moduri, avem $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC$, respectiv $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BC$, deci $AB \cdot AC = AD \cdot BC$, de unde $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}$.

De reținut

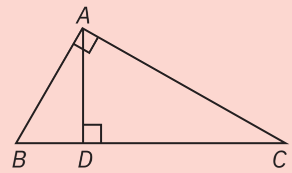
Reciproca teoremei înălțimii

Fie triunghiul ABC și punctul D în interiorul laturii BC, astfel încât $AD \perp BC$ și $AD^2 = BD \cdot CD$. Atunci triunghiul ABC este dreptunghic în A.

Demonstrație:

Din $AD^2 = BD \cdot CD$ rezultă $\frac{AD}{CD} = \frac{BD}{AD}$. Întrucât $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CDA$, conform cazului de asemănare L.U.L., rezultă $\Delta ADB \sim \Delta CDA$, de unde reiese că $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ACD$.

Deoarece $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ABD = 90°$, obținem $\sphericalangle ACD + \sphericalangle ABD = 90°$, ceea ce înseamnă că $\sphericalangle BAC = 90°$, adică triunghiul ABC este dreptunghic în A.



Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Într-un triunghi dreptunghic, lungimea proiecției unei catete pe ipotenuză este de 4 ori mai mare decât lungimea proiecției celeilalte catete pe ipotenuză. Dacă ipotenuza are 30 de centimetri, calculați lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei.

Rezolvare:

Notăm triunghiul dreptunghic cu ABC, cu $AB < AC$ și $\sphericalangle A = 90°$; construim înălțimea AD, $D \in BC$ (Figura 7).

Din ipoteză, $BC = 30$ cm și $CD = 4 \cdot BD$.

Întrucât $BC = BD + CD = 5 \cdot BD$, obținem $BD = 6$ cm și $CD = 24$ cm.

Aplicând teorema înălțimii, rezultă $AD = \sqrt{BD \cdot CD} = 12$ cm.

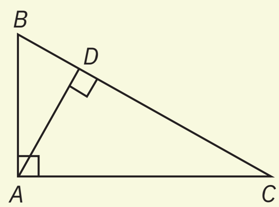


Figura 7

2. În dreptunghiul $ABCD$ (Figura 8) se construiește perpendiculara $CH \perp BD$, $H \in BD$. Dacă $DH = 8$ cm și $BH = 2$ cm, calculați lungimea segmentului CH și aria dreptunghiului $ABCD$.

Rezolvare:

Aplicând teorema înălțimii în triunghiul dreptunghic CBD, rezultă:

$CH = \sqrt{BH \cdot DH} = 4$ cm.

Deoarece $BD = BH + DH = 10$ cm, obținem:

$\mathcal{A}_{ABCD} = 2 \cdot \mathcal{A}_{BCD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot CH \cdot BD = 40 \text{ cm}^2$.

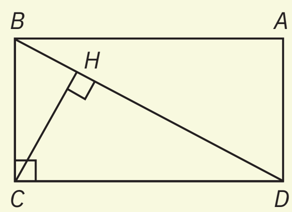


Figura 8

Probleme propuse

1. Reproduceți desenul din Figura 9 și construiți proiecțiile ortogonale ale punctelor A, B, C, respectiv ale segmentelor MN și PQ pe dreapta d.

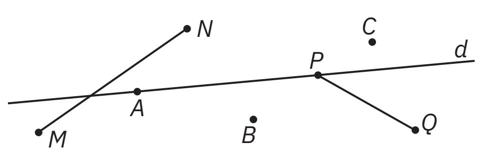


Figura 9

2. Pentru fiecare dintre figurile 10, 11 și 12, precizați care sunt proiecțiile catetelor pe ipotenuză:

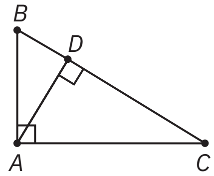
a. 

Figura 10

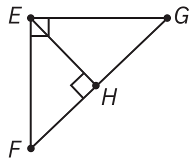
b. 

Figura 11

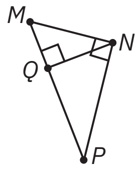
c. 

Figura 12

3. Fie triunghiul ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$ și $AD \perp BC$. Precizați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:
   a. proiecția punctului A pe dreapta BC este punctul D;
   b. proiecția segmentului BC pe dreapta AB este segmentul AB;
   c. proiecția segmentului AD pe dreapta BC este segmentul DC;
   d. proiecția segmentului AC pe dreapta BC este segmentul DC;
   e. proiecția segmentului AB pe dreapta AC este segmentul AC;
   f. proiecția segmentului AB pe dreapta BC este segmentul BD.

4. Considerăm triunghiul ABC și punctele M, N, P situate pe latura AC astfel încât $AM = MN = NP = PC$. Dacă A', M', N', P' sunt proiecțiile punctelor A, M, N, respectiv P, pe dreapta BC, determinați valorile rapoartelor $\frac{A'M'}{M'N'}, \frac{P'C}{P'N'}, \frac{A'N'}{CN'}, \frac{M'N'}{M'C}, \frac{A'C}{M'P'}$.

5. Se consideră triunghiul MNP, cu $\sphericalangle M = 90°$. Dacă $NP = 35$ cm, determinați lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză, știind că acestea sunt invers proporționale cu numerele 0,5 și 0,(3).

6. Fie triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 90°$ și $AD \perp BC$, $D \in BC$.
   a. Dacă $BD = 20$ cm și $DC = 5$ cm, calculați AD.
   b. Dacă $BD = 8$ cm și $AD = 12$ cm, calculați DC.
   c. Dacă $AD = 6$ cm și $DC = 9$ cm, calculați BD.
   d. Dacă $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $BC = 10$ cm, calculați AD.
   e. Dacă $AD = 0{,}5$ m și $BC = 20$ dm, calculați $AB \cdot AC$.
   f. Dacă $BC = 35$ cm și $CD = 4 \cdot BD$, calculați BD, DC, AD.

7. În triunghiul ABC se construiește înălțimea AD, unde punctul D este situat în interiorul laturii BC. Dacă $AD = 2\sqrt{6}$ cm, $BD = 4$ cm și $CD = 6$ cm, arătați că triunghiul ABC este dreptunghic în A.

8. Într-un triunghi dreptunghic, lungimea ipotenuzei este de 34 cm, iar lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză sunt direct proporționale cu numerele 0,(6) și 0,75. Calculați lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei.

9. În triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$ și $BC = 25$ cm, se notează cu D proiecția punctului A pe dreapta BC. Știind că ariile triunghiurilor ADB și ADC sunt proporționale cu 9 și 16, calculați lungimea segmentului AD.

10. În dreptunghiul $ABCD$ se construiește perpendiculara $AP \perp BD$, $P \in BD$. Dacă $BP = 20$ cm și $PD = 5$ cm, calculați lungimea segmentului AP.

11. În rombul $ABCD$, se notează cu O intersecția diagonalelor și cu M proiecția punctului O pe dreapta AB. Dacă $OM = 6$ cm și $MB = 4$ cm, determinați lungimea segmentului AM și perimetrul rombului $ABCD$.

12. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $AB < CD$. Se știe că $BD \perp BC$, $AB = 4$ cm și $DC = 8$ cm. Fie $BM \perp DC$, $M \in DC$. Arătați că $MC = 2$ cm. Determinați BM.

13. Fie trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB < CD$, $\sphericalangle A = 90°$ și $DB \perp BC$. Fie P proiecția punctului B pe dreapta CD. Știind că $AB = 16$ cm și $BP = 12$ cm, arătați că $DC = 25$ cm.

Minitest

1. Proiectați vârfurile triunghiului ABC pe dreapta d, unde:
   a. $d \parallel AB$; b. $d \perp BC$; c. $d = AC$. (3p)
2. Proiecțiile catetelor unui triunghi dreptunghic pe ipotenuză au lungimile 9 cm și 25 cm. Determinați lungimea înălțimii din vârful unghiului drept. (3p)
3. În triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, se construiește înălțimea AD, cu $D \in BC$. Dacă lungimile segmentelor BD și DC sunt proporționale cu 2 și 8, iar $BC = 20$ cm, calculați lungimile segmentelor BD, DC și AD. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

7.2

Lecția 2: Teorema catetei

Cuvinte-cheie

proiecție | catetă | medie geometrică | înălțime | ipotenuză | triunghiuri asemenea

Teorema catetei

Mate practică

Considerăm triunghiul ABC, dreptunghic în A, în care am construit înălțimea AD, $D \in BC$. Din triunghiul ABC decupăm, de-a lungul înălțimii AD, două triunghiuri ca în Figura 1.

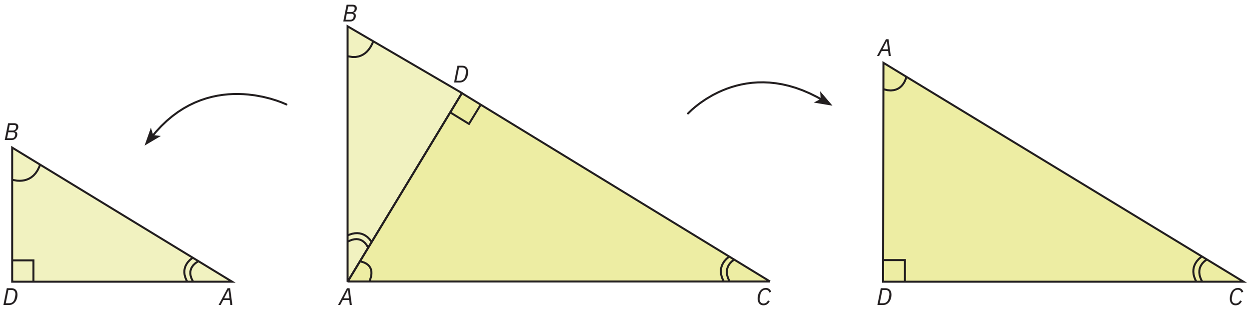


Figura 1

Ce observăm?

Analizând triunghiurile ABC, DBA și DAC, constatăm că $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDA = \sphericalangle ADC = 90°$ și, în plus:

- unghiul B este unghi comun triunghiurilor dreptunghice DBA și ABC;
- unghiul C este unghi comun triunghiurilor dreptunghice DAC și ABC.

Mai mult, deoarece unghiurile cu același complement sunt congruente, rezultă că $\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle ABC$, respectiv $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ACB$.

Conform cazului de asemănare U.U., obținem $\Delta DBA \sim \Delta ABC$ și $\Delta DAC \sim \Delta ABC$.

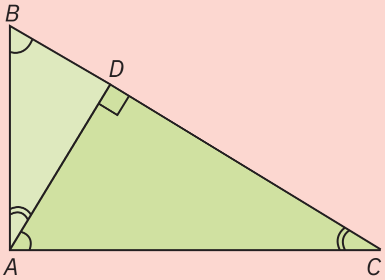
Notă istorică. Rezultatul de mai sus apare în cea mai faimoasă carte de geometrie a Antichității, *Elementele* lui Euclid, în Cartea a VI-a (Propoziția 8), sub următorul enunț:

Teoremă. Într-un triunghi dreptunghic, înălțimea corespunzătoare ipotenuzei determină două triunghiuri asemenea între ele și ambele asemenea cu triunghiul inițial.

De reținut

Teorema catetei

Într-un triunghi dreptunghic, pătratul lungimii fiecărei catete este egal cu produsul dintre lungimea ipotenuzei și lungimea proiecției acestei catete pe ipotenuză.



Ipoteză: ΔABC, $\sphericalangle A = 90°$
$AD \perp BC$, $D \in BC$

Concluzie: $AB^2 = BC \cdot BD$
$AC^2 = BC \cdot CD$

Demonstrație:

Fiecare dintre triunghiurile DBA și DAC este asemenea cu triunghiul ABC. Atunci:

$$\Delta DBA \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow AB^2 = BC \cdot BD;$$

$$\Delta DAC \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{DC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC^2 = BC \cdot CD.$$

Prima reciprocă a teoremei catetei

În triunghiul ABC, dacă D este un punct pe segmentul BC astfel încât $AD \perp BC$ și are loc una dintre egalitățile:

$$AB^2 = BC \cdot BD \text{ sau } AC^2 = BC \cdot CD,$$

atunci $\sphericalangle BAC = 90°$.

A doua reciprocă a teoremei catetei

În triunghiul ABC, dacă D este un punct pe segmentul BC astfel încât au loc simultan relațiile:

$$AB^2 = BC \cdot BD \text{ și } AC^2 = BC \cdot CD,$$

atunci $\sphericalangle BAC = 90°$ și $AD \perp BC$.

Gândire critică

Aplicații ale geometriei în algebră. Inegalitatea mediilor

Fiind date două numere reale pozitive a și b, numerele:

$$m_g(a, b) = \sqrt{ab}, \qquad m_a(a, b) = \frac{a+b}{2}, \qquad m_h(a, b) = \frac{2ab}{a+b}$$

sunt cele trei valori medii clasice descoperite de Pitagora: media geometrică (m_g), media aritmetică (m_a) și media armonică (m_h).

Următoarea configurație permite o interpretare geometrică a celor trei medii, precum și o demonstrație evidentă pentru (probabil) cea mai utilizată inegalitate din lume:

$$m_h(a, b) \le m_g(a, b) \le m_a(a, b). \qquad \text{(inegalitatea mediilor)}$$

Întrucât este evident că pentru $a = b$ avem $m_h(a, b) = m_g(a, b) = m_a(a, b) = a = b$, vom presupune că $a < b$ (cazul $a > b$ se tratează analog).

În Figura 2:

- se consideră segmentele $BD = a$ și $CD = b$;
- se construiește cercul de diametru $BC = a + b$ și centru O;
- se ridică perpendiculara $DA \perp BC$ (A este pe cerc).

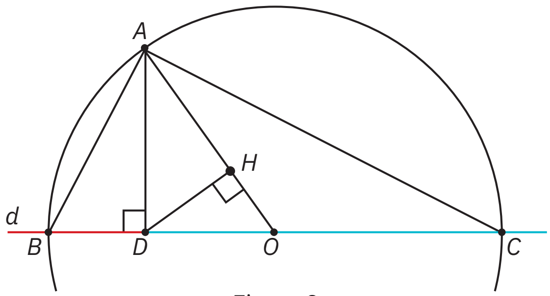


Figura 2

În triunghiul dreptunghic ABC:

- AO este mediană, deci $AO = \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{a+b}{2} = m_a(a, b)$;
- AD este înălțime și, conform teoremei înălțimii,
  $AD = \sqrt{BD \cdot CD} = \sqrt{ab} = m_g(a, b)$.

Deoarece lungimea înălțimii este mai mică decât lungimea medianei (perpendiculara este mai „scurtă” decât oblica), rezultă $AD < AO$, adică $m_g(a, b) < m_a(a, b)$.

Fie H proiecția punctului D pe AO. Cu teorema catetei în triunghiul DAO se obține $AD^2 = AH \cdot AO$, de unde:

$$AH = \frac{AD^2}{AO} = \frac{2ab}{a+b} = m_h(a, b).$$

Atunci $AH < AD < AO$, ceea ce arată că $m_h(a, b) < m_g(a, b) < m_a(a, b)$.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. În triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC$, se construiește înălțimea AD, $D \in BC$ (Figura 3). Perpendiculara din D pe AB intersectează latura AB în E. Știind că $AD = 8$ cm și $AE = 6{,}4$ cm, determinați perimetrul triunghiului ABC.

Rezolvare:

Aplicând teorema catetei în triunghiul dreptunghic ADB, rezultă $AD^2 = AE \cdot AB$, de unde obținem $AB = 10$ cm. Atunci $BE = AB - AE = 3{,}6$ cm și, aplicând din nou teorema catetei în triunghiul ADB, obținem $BD^2 = BE \cdot BA$, deci $BD = 6$ cm.

În concluzie, $BC = 2 \cdot BD = 12$ cm, iar triunghiul ABC are perimetrul de 32 cm.

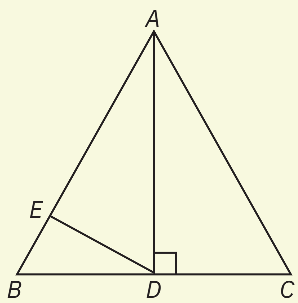


Figura 3

2. În trapezul dreptunghic $ABCD$, cu $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, diagonala BD este perpendiculară pe latura BC (Figura 4). Știind că $AB = 15$ cm și $CD = 20$ cm, determinați:

a. lungimea laturii BC; **b.** perimetrul triunghiului ABD.

Rezolvare:

Construim perpendiculara $BE \perp CD$, $E \in CD$.

Patrulaterul $ABED$ este dreptunghi, deci $DE = AB = 15$ cm, iar $CE = 5$ cm.

a. Deoarece BE este înălțime în triunghiul dreptunghic BDC, din teorema catetei rezultă $BC^2 = CD \cdot CE$, de unde obținem $BC = 10$ cm.

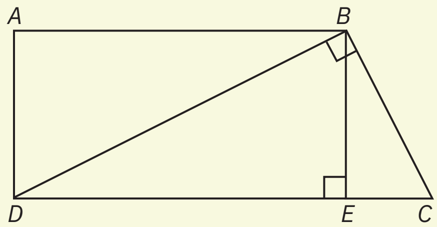


Figura 4

b. Pentru a determina lungimea segmentului BD, aplicăm din nou teorema catetei în triunghiul BDC. Atunci $DB^2 = DE \cdot DC$, deci $DB = 10\sqrt{3}$ cm.

Segmentul AD este congruent cu segmentul BE și, aplicând teorema înălțimii, rezultă $BE = \sqrt{ED \cdot EC} = 5\sqrt{3}$ cm.

În consecință, perimetrul triunghiului ABD este $P_{ABD} = AD + AB + DB = 15\sqrt{3} + 15$ cm.

Probleme propuse

1. Pentru fiecare dintre figurile 5-8, determinați lungimea catetei necunoscute (măsurile sunt exprimate în cm):

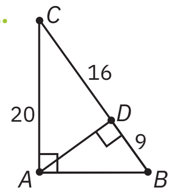
a. 

Figura 5

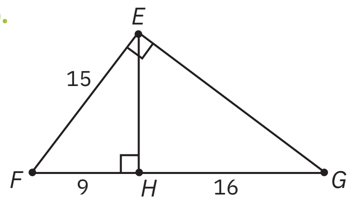
b. 

Figura 6

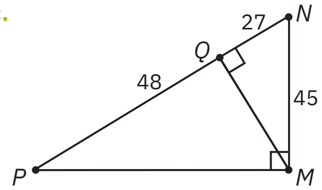
c. 

Figura 7

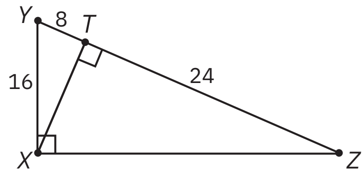
d. 

Figura 8

2. În triunghiul ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$ și $\sphericalangle B = 60°$, lungimea catetei AB este de 4 cm. Determinați:
   a. lungimea segmentului BC;
   b. lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză;
   c. lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei;
   d. lungimea segmentului AC.
3. Fie triunghiul ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$ și $AD \perp BC$, $D \in BC$.
   a. Dacă $AB = 18$ cm și $BD = 12$ cm, calculați BC.
   b. Dacă $AC = 4$ cm și $BC = 8$ cm, calculați CD.
   c. Dacă $BD = 15$ cm și $BC = 60$ cm, calculați AB și AC.
   d. Dacă $CD = \frac{3}{4} \cdot BC$ și $AB = 12$ cm, calculați BC și AC.
   e. Dacă $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{7}$ și $BC = 36$ cm, calculați BD, DC, AB, AC.
4. Într-un triunghi dreptunghic, cu ipotenuza de lungime 36 cm, proiecția unei catete pe ipotenuză este de 16 cm. Determinați lungimea celeilalte catete.
5. Proiecțiile catetelor unui triunghi dreptunghic pe ipotenuză au lungimile 2,4 cm și 9,6 cm. Calculați perimetrul triunghiului.
6. În triunghiul dreptunghic ABC, mediana relativă la ipotenuză este $AM = 10$ cm și $\sphericalangle MAB = 60°$. Calculați $\frac{DB}{DC}$, unde D este proiecția punctului A pe BC.
7. În triunghiul dreptunghic isoscel ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, ipotenuza BC are lungimea de 16 cm. Calculați perimetrul triunghiului ABC.

Minitest

1. Fie triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$ și $AD \perp BC$, $D \in BC$.
   Știind că $\frac{DC}{BC} = \frac{1}{4}$ și $AC = 12$ cm, calculați lungimile segmentelor BC și AB. (3p)
2. În triunghiul ABC, dreptunghic în A, mediana AM are lungimea de 6 cm, iar unghiul B are măsura de 60°. Calculați:
   a. lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză;
   b. lungimile catetelor AB și AC. (3p)
3. Într-un triunghi dreptunghic, raportul lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză este egal cu $\frac{4}{9}$, iar aria triunghiului este egală cu 624 cm^2. Calculați perimetrul triunghiului. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Lecția 3: Teorema lui Pitagora

Cuvinte-cheie

catetă ipotenuză triplet pitagoreic

Teorema lui Pitagora

Mate practică

Un robot programat să sorteze piese LEGO roșii, galbene și albastre a așezat piesele ca în configurația din Figura 1.

Piesele roșii formează un pătrat 5×5, piesele albastre formează un pătrat 4×4, piesele galbene un pătrat 3×3, iar cele trei pătrate delimitează un triunghi dreptunghic.

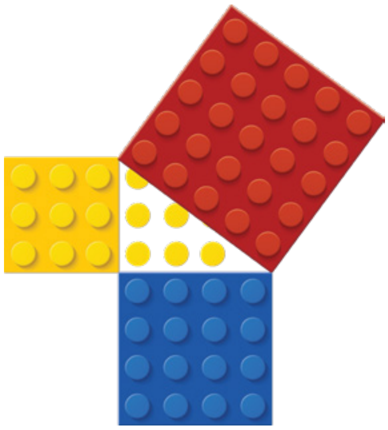


Figura 1

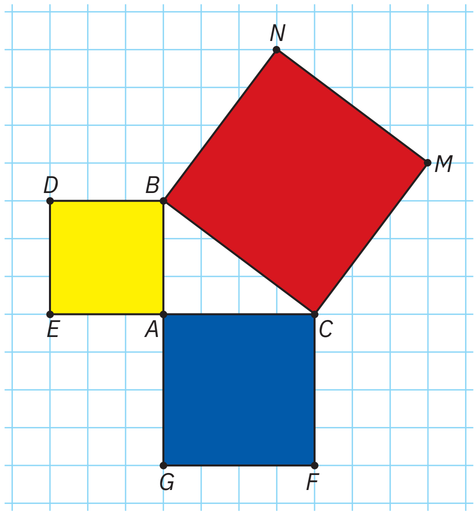


Figura 2

Ce observăm?

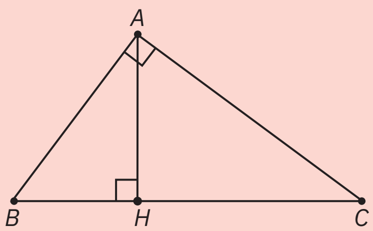
Aria suprafeței ocupate de piesele roșii este egală cu suma ariilor suprafețelor ocupate de celelalte piese. Analizând modelul matematic prezentat în Figura 2, constatăm că, dat fiind un triunghi *ABC*, dreptunghic în *A*, în exteriorul căruia construim pătratele *ABDE*, *ACFG* și *BCMN*, suma ariilor pătratelor construite pe catete este egală cu aria pătratului construit pe ipotenuză:

$\mathcal{A}_{BCMN} = \mathcal{A}_{ABDE} + \mathcal{A}_{ACFG}$ sau, echivalent, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

De reținut

Teorema lui Pitagora

Într-un triunghi dreptunghic, suma pătratelor lungimilor catetelor este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei.



Ipoteză: ΔABC, $\sphericalangle A = 90°$

Concluzie: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Demonstrație:

Construim înălțimea corespunzătoare ipotenuzei: $AH \perp BC$, $H \in BC$.

Aplicând teorema catetei, obținem $AB^2 = BH \cdot BC$, respectiv $AC^2 = CH \cdot BC$.

Adunând cele două relații, rezultă:

$$AB^2 + AC^2 = BH \cdot BC + CH \cdot BC = BC \cdot (BH + CH) = BC \cdot BC = BC^2.$$

7.3

Teorema lui Pitagora se aplică pentru a determina lungimea unei laturi a unui triunghi dreptunghic atunci când se cunosc lungimile celorlalte două.

Astfel, în triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, avem:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}; \qquad AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}; \qquad AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}.$$

Exemple

În triunghiurile dreptunghice ABC, DEF și MNP din figurile 3-5, se dau lungimile a câte două laturi. Folosind teorema lui Pitagora, vom determina lungimea celei de-a treia laturi.

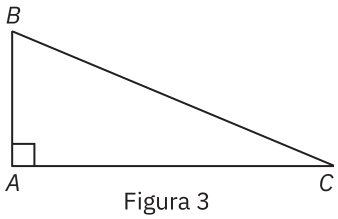


Figura 3

$AB = 5$ cm, $AC = 12$ cm

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 13$ cm

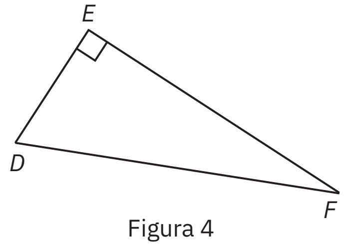


Figura 4

$DE = 8$ cm, $EF = 17$ cm

$DF = \sqrt{EF^2 - DE^2} = 15$ cm

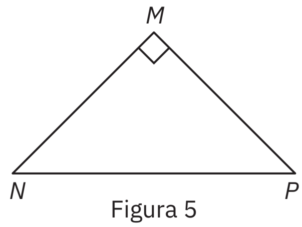


Figura 5

$MN = MP = a$ cm

$NP = \sqrt{MN^2 + MP^2} = a\sqrt{2}$ cm

De reținut

Reciproca teoremei lui Pitagora

Dacă într-un triunghi suma pătratelor lungimilor a două laturi este egală cu pătratul lungimii celei de a treia laturi, atunci triunghiul este dreptunghic.

Demonstrație:

Fie triunghiul ABC cu $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Vom arăta că $\sphericalangle A = 90°$.

Cum $BC^2 > AB^2 + AC^2 > AB^2$, rezultă că $BC > AB$, deci unghiul C este ascuțit, fiind mai mic decât unghiul A. Presupunem, prin absurd, că $\sphericalangle A \neq 90°$. Atunci proiecția punctului B pe dreapta AC este un punct E, $E \neq A$.

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice EBC și EAB, rezultă $BC^2 = EB^2 + EC^2$, respectiv $AB^2 = EB^2 + EA^2$. Obținem $EC^2 - EA^2 = BC^2 - AB^2$, iar din ipoteză rezultă că $EC^2 - AE^2 = AC^2$ (1).

În funcție de măsura unghiului A, avem două cazuri (Figura 6a, respectiv Figura 6b):

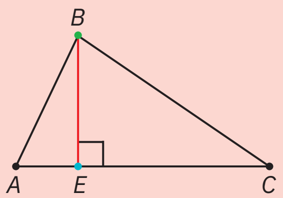


Figura 6a $\sphericalangle A < 90°$: E este între A și C

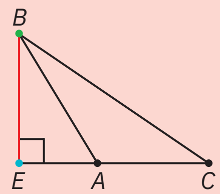


Figura 6b $\sphericalangle A > 90°$: A este între E și C

Cazul I. Dacă $\sphericalangle A < 90°$, atunci $EC = AC - AE$ (Figura 6a), deci $EC^2 = (AC - AE)(AC - AE) = AC^2 - 2AC \cdot AE + AE^2$. Din (1) obținem $AC^2 - 2 \cdot AC \cdot AE + AE^2 - AE^2 = AC^2$, de unde reiese că $2 \cdot AC \cdot AE = 0$, adică $AE = 0$, contradicție cu $A \neq E$.

Cazul II. Dacă A este între E și C, atunci $EC = AC + AE$ (Figura 6b). Obținem $EC^2 = AC^2 + 2 \cdot AC \cdot AE + AE^2$ și, înlocuind în (1), rezultă din nou că $2 \cdot AC \cdot AE = 0$, adică $AE = 0$, contradicție cu $A \neq E$.

Așadar, presupunerea făcută este falsă, deci $\sphericalangle A = 90°$.

Gândire critică

Să analizăm atent Figura 7, în care se dă un triunghi ABC dreptunghic în A, în exteriorul căruia am construit pătratele $ABDE$, $ACFG$ și $BCMN$. Notăm cu H proiecția lui A pe BC și cu P, intersecția dreptelor AH și MN.

Ariile colorate la fel sunt egale, deoarece:

$$\mathcal{A}_{ABDE} = AB^2 = BH \cdot BC = BH \cdot BN = \mathcal{A}_{BHPN};$$

$$\mathcal{A}_{ACFG} = AC^2 = CH \cdot CB = CH \cdot CM = \mathcal{A}_{CHPM}.$$

Rezultă: $\mathcal{A}_{ABDE} + \mathcal{A}_{ACFG} = \mathcal{A}_{BHPN} + \mathcal{A}_{CHPM} = \mathcal{A}_{BCMN}$,

adică suma ariilor pătratelor construite în exteriorul catetelor este egală cu aria pătratului construit în exteriorul ipotenuzei.

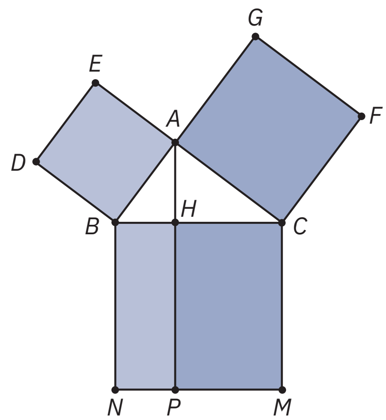


Figura 7

Activitate pe grupe

Triplete pitagoreice

Un triplet de numere naturale nenule (a, b, c) care verifică relația

$$a^2 + b^2 = c^2$$

se numește *triplet pitagoreic*.

Reciproca teoremei lui Pitagora arată că, dacă lungimile laturilor unui triunghi constituie un triplet pitagoreic, atunci triunghiul este dreptunghic.

Sarcini de grup

1. Lucrând în grupe de câte 3-4 elevi, verificați dacă următoarele triplete sunt pitagoreice:

a.	(3, 4, 5)	**e.**	(5, 12, 13)	**i.**	(8, 15, 17)	**m.**	(7, 24, 25)
b.	(20, 21, 29)	**f.**	(12, 35, 37)	**j.**	(9, 40, 41)	**n.**	(28, 45, 53)
c.	(11, 60, 61)	**g.**	(16, 63, 65)	**k.**	(33, 56, 65)	**o.**	(48, 55, 73)
d.	(13, 84, 85)	**h.**	(36, 77, 85)	**l.**	(39, 80, 89)	**p.**	(65, 72, 97)

2. Demonstrați că, dacă m, n și k sunt numere naturale nenule, cu $m > n$, atunci numerele

$$a = 2kmn, \qquad b = k(m^2 - n^2), \qquad c = k(m^2 + n^2)$$

formează un triplet pitagoreic.

Mai mult, se poate demonstra că orice triplet pitagoreic are forma de mai sus.

3. Utilizați internetul pentru a afla mai multe despre tripletele pitagoreice și despre tripletele heroniene, apoi organizați o dezbatere despre aplicațiile acestora în practică.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Un triunghi isoscel are laturile congruente de 10 cm, iar baza de lungime 12 cm. Calculați lungimea înălțimii corespunzătoare bazei.

Rezolvare:

Folosind notațiile din Figura 8, avem $BC = 12$ cm și $AB = AC = 10$ cm.

Înălțimea AD este și mediană, deci $BD = \frac{1}{2} \cdot BC = 6$ cm.

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic DAB, cu $\sphericalangle D = 90°$, obținem $AB^2 = AD^2 + DB^2$, de unde $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{100 - 36}$ cm $= 8$ cm.

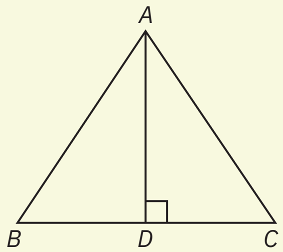


Figura 8

2. Diagonalele unui romb au 3 dm și, respectiv, 16 cm. Determinați perimetrul rombului.

Rezolvare:

Notăm rombul $ABCD$, unde O este intersecția diagonalelor (Figura 9).

Atunci $AC = 3$ dm $= 30$ cm și $BD = 16$ cm.

Rezultă $AO = 15$ cm, $OB = 8$ cm și, utilizând teorema lui Pitagora în triunghiul OAB, obținem $AB^2 = AO^2 + OB^2$, de unde $AB = 17$ cm. Perimetrul rombului este $4 \cdot 17 = 68$ cm.

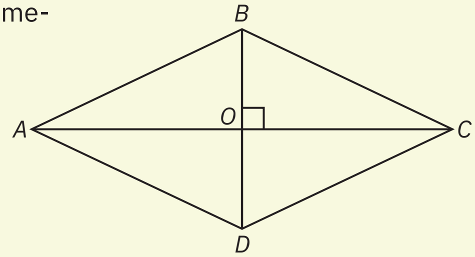


Figura 9

3. În trapezul dreptunghic $ABCD$, cu $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, se cunosc $BC = 10$ cm, $BD = 10\sqrt{3}$ cm și $CD = 20$ cm (Figura 10).

a. Arătați că dreptele BC și BD sunt perpendiculare.

b. Calculați aria trapezului.

Rezolvare:

a. Observăm că $BD^2 + BC^2 = 400 = CD^2$.

Conform reciprocei teoremei lui Pitagora, rezultă că triunghiul BCD este dreptunghic în B. În consecință, $BC \perp BD$.

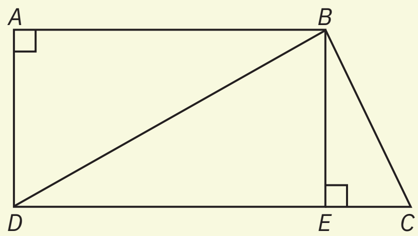


Figura 10

b. Construim perpendiculara $BE \perp CD$, $E \in CD$. Cum BE este înălțime în triunghiul dreptunghic BDC, rezultă
$BE = \dfrac{BD \cdot BC}{CD} = 5\sqrt{3}$ cm.

Patrulaterul $ABED$ este dreptunghi, deci $AD = BE = 5\sqrt{3}$ cm.

Cu teorema lui Pitagora aplicată în triunghiul ABD, obținem $AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = 15$ cm.

Aria trapezului este $\mathcal{A}_{ABCD} = \dfrac{1}{2} \cdot AD \cdot (AB + CD) = \dfrac{175\sqrt{3}}{2}$ cm^2.

4. Se consideră triunghiul ABC. Arătați că:

a. dacă $\sphericalangle A < 90°$, atunci $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot \text{pr}_{AB} AC$;

b. dacă $\sphericalangle A > 90°$, atunci $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2 \cdot AB \cdot \text{pr}_{AB} AC$.

Rezolvare:
Unul dintre unghiurile B și C ale triunghiului este ascuțit. Presupunem, în continuare, că $\sphericalangle B < 90°$. Notăm cu D proiecția lui C pe AB; atunci $pr_{AB}AC = AD$.
În funcție de măsura unghiului A (ascuțit sau obtuz), sunt posibile două configurații:

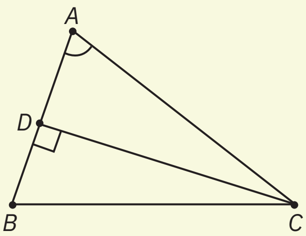


Figura 11: $\sphericalangle A < 90°$

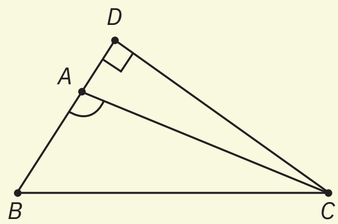


Figura 12: $\sphericalangle A > 90°$

a. Dacă unghiul A este ascuțit, atunci punctul D se află în interiorul laturii AB (Figura 11).

Cu teorema lui Pitagora în triunghiul BCD, obținem:
$BC^2 = CD^2 + DB^2 = AC^2 - AD^2 + (AB - AD)^2 =$
$= AC^2 - AD^2 + (AB - AD)(AB - AD) =$
$= AC^2 - AD^2 + AB^2 - AB \cdot AD - AD \cdot AB + AD^2 =$
$= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AD.$

b. Dacă unghiul A este obtuz, atunci punctul D se află în exteriorul laturii AB (Figura 12).
Aplicând încă o dată teorema lui Pitagora în triunghiul BCD, obținem:
$BC^2 = CD^2 + DB^2 = AC^2 - AD^2 + (AB + AD)^2 =$
$= AC^2 - AD^2 + (AB + AD)(AB + AD) =$
$= AC^2 - AD^2 + AB^2 + AB \cdot AD + AD \cdot AB + AD^2 =$
$= AB^2 + AC^2 + 2 \cdot AB \cdot AD.$

Comentariu. Problema de mai sus este cunoscută în literatura de specialitate sub numele de *Teorema lui Pitagora generalizată*. Aceasta oferă și un criteriu pentru a stabili natura unui unghi (sau a unui triunghi). Astfel, fiind dat un triunghi ABC:
- dacă $AB^2 + AC^2 > BC^2$, atunci $\sphericalangle A < 90°$;
- dacă $AB^2 + AC^2 < BC^2$, atunci $\sphericalangle A > 90°$.

Probleme propuse

1. Pentru fiecare dintre figurile 13-15, determinați lungimea ipotenuzei (toate segmentele sunt măsurate în cm):

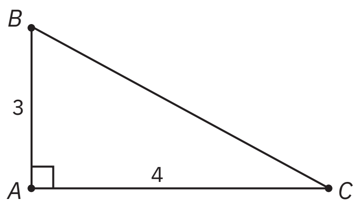
a.


Figura 13

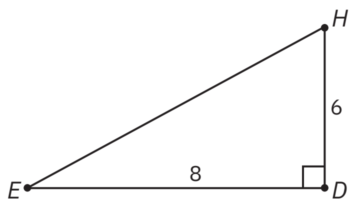
b.


Figura 14

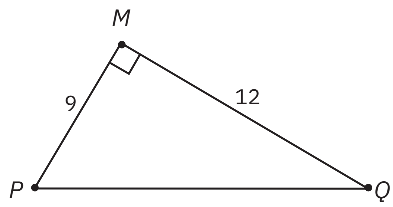
c.


Figura 15

2. Pentru fiecare dintre figurile 16-18, determinați lungimea catetei necunoscute (segmentele sunt măsurate în cm):

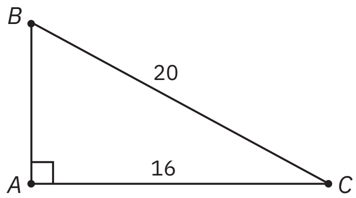
a. 

Figura 16

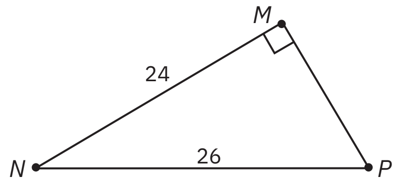
b. 

Figura 17

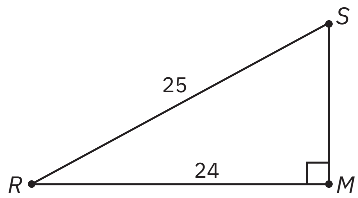
c. 

Figura 18

3. Fie triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle B = 90°$.
   a. Dacă $AB = 4$ cm și $BC = 12$ cm, calculați AC.
   b. Dacă $AC = 20$ cm și $BC = 16$ cm, calculați AB.
   c. Dacă $AB = 15$ cm și $AC = 25$ cm, calculați BC.
4. Determinați lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic isoscel cu catetele de:
   a. 6 cm; b. 8 cm; c. 15 cm; d. 20 cm.
5. Determinați lungimea diagonalei unui pătrat cu latura de:
   a. 4 cm; b. 9 cm; c. 12 cm; d. 25 cm.
6. Determinați lungimea înălțimii unui triunghi echilateral cu latura de:
   a. 2 cm; b. 10 cm; c. 18 cm; d. 32 cm.
7. Dreptunghiul $ABCD$ are $AB = 9$ cm și $AC = 15$ cm. Calculați perimetrul dreptunghiului $ABCD$.
8. Rombul $ABCD$ are $AB = 25$ cm și $AC = 30$ cm. Calculați BD și aria rombului.
9. a. În triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC$, se cunosc $AB = 25$ cm și $BC = 48$ cm. Dacă $AD \perp BC$, $D \in BC$, calculați lungimea segmentului AD.
   b. În triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC$, se știe că $BC = 24$ cm. Fie D proiecția punctului A pe dreapta BC. Dacă $AD = 9$ cm, determinați lungimea laturii AB.
10. Dreptunghiul $MNPQ$ are $MN = 8$ cm și $NP = 4$ cm. Calculați lungimile diagonalelor dreptunghiului $MNPQ$.
11. Triunghiul dreptunghic isoscel ABC are $\sphericalangle A = 90°$ și $AB = 5\sqrt{2}$ cm.
    a. Calculați BC. b. Calculați aria triunghiului ABC.
12. În triunghiul ABC, dreptunghic în A, se cunosc $AB = 8$ cm și $BC = 10$ cm. Se notează cu E mijlocul laturii AB.
    a. Calculați AC. b. Calculați CE.
13. Dreptunghiul $ABCD$ are $AB > BC$, $AC = 12$ cm și unghiul ascuțit format de diagonale cu măsura de 60°.
    a. Arătați că triunghiul BOC este echilateral, unde O este punctul de intersecție al diagonalelor dreptunghiului.
    b. Calculați lungimile segmentelor BC și AB.
14. Pătratul $ABCD$ are perimetrul egal cu 20 cm.
    a. Calculați lungimea laturii AB și aria pătratului $ABCD$.
    b. Calculați perimetrul triunghiului ABC.
15. Dreptunghiul $ABCD$ are perimetrul egal cu 48 cm. Dacă lungimea dreptunghiului este de două ori mai mare decât lățimea, calculați lungimile diagonalelor dreptunghiului $ABCD$.
16. Triunghiul echilateral ABC are $AB = 6\sqrt{3}$ cm. Calculați lungimea înălțimii triunghiului ABC și aria acestuia.
17. Stabiliți în care dintre următoarele situații triunghiul ABC este dreptunghic și indicați unghiul drept:
    a. $AB = 3$ cm, $AC = 5$ cm, $BC = 4$ cm;
    b. $AB = 6$ cm, $AC = 7$ cm, $BC = 8$ cm;
    c. $AB = 15$ cm, $AC = 17$ cm, $BC = 8$ cm;
    d. $AB = 4$ cm, $AC = 2$ cm, $BC = 2\sqrt{3}$ cm;
    e. $AB = 3$ cm, $AC = \sqrt{3}$ cm, $BC = \sqrt{5}$ cm.

18. *ABCD* este trapez dreptunghic, cu $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, $BE \perp DC$, iar $AB = 6$ cm, $CD = 9$ cm, $AD = 4$ cm. Calculați perimetrul trapezului *ABCD*.

19. Într-un trapez dreptunghic *ABCD*, cu $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$ și $AB < CD$, se cunosc $AB = 10$ cm, $CD = 18$ cm și $AD = 6$ cm. Calculați perimetrul trapezului *ABCD*.

20. Într-un trapez dreptunghic *ABCD*, cu $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$ și $AB > CD$, se cunosc $CD = 5$ cm, $BC = 6$ cm și $AD = 2\sqrt{5}$ cm. Calculați lungimea bazei mari *AB*.

21. În Figura 19, *ABCD* este trapez isoscel, $BE \perp DC$, $AF \perp DC$, $AB = 6$ cm, $CD = 12$ cm și $BC = 5$ cm. Calculați înălțimea trapezului *ABCD*.

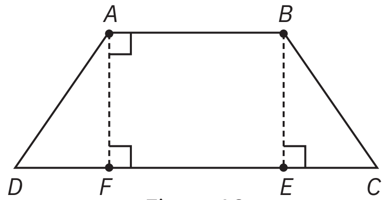


Figura 19

22. Într-un trapez isoscel *ABCD* ($AB \parallel CD$) se cunosc $AB = 7$ cm, $CD = 17$ cm și $BD = 15$ cm.

a. Calculați înălțimea trapezului *ABCD*.

b. Calculați aria trapezului *ABCD*.

Minitest

1. Rombul *ABCD* are diagonalele $AC = 16$ cm și $BD = 12$ cm. Calculați lungimea laturii *AB*. **(3p)**

2. Se consideră triunghiul *ABC* cu $AB = 2\sqrt{3}$ cm, $AC = 2\sqrt{6}$ cm și $BC = 6$ cm. **(3p)**

a. Stabiliți natura triunghiului *ABC*.

b. Calculați lungimea înălțimii duse din *A* pe *BC*.

3. În triunghiul dreptunghic *ABC*, cu $\sphericalangle A = 90°$, se știe că $AB = 12$ cm și $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{5}{3}$.

Calculați aria triunghiului *ABC*. **(3p)**

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Istoria matematicii

Marea teoremă a lui Fermat

Plecând de la faptul că ecuația $x^2 + y^2 = z^2$ are soluții în numere întregi (orice triplet pitagoreic este soluție), matematicienii lumii s-au întrebat dacă există triplete de numere întregi nenule care să verifice relația:

$$x^n + y^n = z^n,$$

unde $n \geq 3$ este număr natural.

În jurul anului 1637, matematicianul francez Pierre de Fermat scria următoarea frază pe marginea unei pagini a celebrei cărți *Aritmetica* a lui Diofant:

> *Este imposibil să separi un cub în două cuburi, o putere a patra în alte două puteri a patra sau, în general, orice putere mai mare decât a doua a unui număr natural în alte două puteri asemenea. Am descoperit o demonstrație cu totul remarcabilă a acestui lucru, dar această margine este prea îngustă pentru a o conține.*


Pierre de Fermat

Demonstrația menționată de Fermat nu a fost găsită niciodată printre scrierile rămase în urma sa, dar proprietatea enunțată a devenit celebră, cu atât mai mult cu cât nimeni nu reușea să o demonstreze.

De-a lungul anilor au fost găsite demonstrații pentru valori particulare: cazul $n = 3$ a fost rezolvat de Euler în 1770; cazul $n = 5$ de către Dirichlet și Legendre în 1825. Cu ajutorul calculatorului, s-a demonstrat că teorema enunțată de Fermat este adevărată pentru toate valorile lui *n* cuprinse între 3 și 4 000 000.


Andrew Wiles

Demonstrația completă a marii teoreme a lui Fermat a fost dată, după mai mult de 350 de ani de la enunțarea ei, de către matematicianul britanic Andrew Wiles în anul 1993. Deși după prezentarea inițială s-au găsit câteva erori în demonstrație, care păreau, încă o dată, imposibil de depășit, acestea au fost remediate până la finalul anului 1994.

Mai multe informații și referințe bibliografice se găsesc în enciclopedia liberă:
https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat's_Last_Theorem

Lecția 4: Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic

Cuvinte-cheie

sinus | tangentă | trigonometrie | cosinus | cotangentă | catetă, ipotenuză

Rapoarte constante în triunghiul dreptunghic

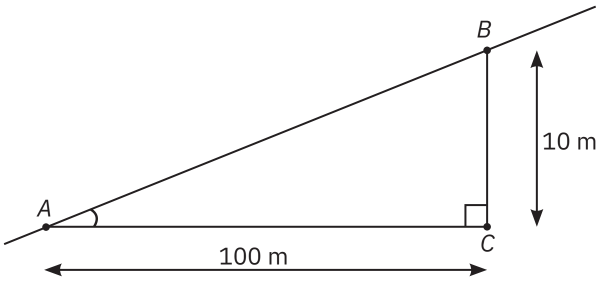
Mate practică

Pe marginea unui drum de munte se află semnul de circulație din imaginea alăturată. Dina îl observă și îl întreabă pe șoferul autocarului ce reprezintă. Acesta le explică excursioniștilor că este un indicator de „urcare cu înclinare mare”.

Dina: Am mai văzut acest semn, dar nu am înțeles exact despre ce este vorba. Oare ce înseamnă 10%?

Vlad: Tata mi-a spus că procentul de 10%, numit și panta drumului, este raportul dintre diferența de altitudine dintre două puncte de pe drum și distanța în plan orizontal dintre proiecțiile acestora. Indicatorul nostru, cu înclinare de 10%, arată că la fiecare 100 de metri parcurși în plan orizontal, avem o creștere în altitudine de 10 metri.

În desenul de mai jos, segmentul AB reprezintă drumul parcurs, iar raportul dintre lungimile segmentelor BC și AC este $\frac{1}{10}$, adică 10%.



Ce observăm?

Înclinarea drumului, care este determinată de măsura unghiului BAC, poate fi caracterizată și cu ajutorul raportului dintre lungimile segmentelor BC și AC, adică raportul dintre cateta opusă și cateta alăturată unghiului A.

Să analizăm figurile 1 și 2, urmărind raportul dintre cateta opusă și cateta alăturată unui unghi de măsură x dintr-un triunghi dreptunghic:

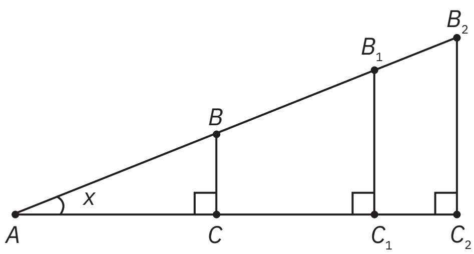


Figura 1

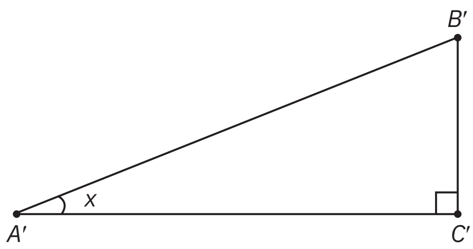


Figura 2

Triunghiurile AB_1C_1, AB_2C_2, respectiv $A'B'C'$ sunt asemenea cu triunghiul ABC, deci:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2} = \frac{B'C'}{A'C'}.$$

Așadar, raportul dintre lungimea catetei opuse unghiului de măsură x și lungimea celeilalte catete nu depinde de triunghiul în care se consideră unghiul (dar depinde de valoarea lui x).

De reținut

Proprietate. Oricare ar fi triunghiul dreptunghic cu un unghi de măsură dată x, raportul dintre lungimea catetei opuse acestui unghi și lungimea catetei alăturate unghiului este constant.

7.4

Activitate pe grupe

Reproduceți pe caiete figurile 1 și 2.

Sarcini de grup

1. Lucrând în grupe de câte 3-4 elevi, analizați triunghiurile ABC, AB_1C_1, AB_2C_2 și $A'B'C'$ și comparați:
   a. rapoartele dintre lungimea catetei opuse unghiului de măsură x și lungimea ipotenuzei din fiecare triunghi;
   b. rapoartele dintre lungimea catetei alăturate unghiului de măsură x și lungimea ipotenuzei din fiecare triunghi.
2. Formulați enunțuri asemănătoare cu proprietatea de mai sus, referitoare la rapoartele dintre lungimea unei catete și lungimea ipotenuzei.

Sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unui unghi ascuțit

Proprietățile observate până acum în această lecție ne îndreptățesc să afirmăm că:

În fiecare triunghi dreptunghic care are un unghi ascuțit de măsură x, valorile următoarelor rapoarte sunt constante:

$$\frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuză}};\quad \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuză}};\quad \frac{\text{cateta opusă}}{\text{cateta alăturată}};\quad \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{cateta opusă}}.$$

Mai mult, este de preferat să caracterizăm mărimea unui unghi ascuțit nu neapărat prin numărul său de grade, ci prin valoarea unuia dintre aceste rapoarte.

Întrucât există o corespondență directă între măsura unui unghi și valoarea fiecăruia dintre aceste rapoarte, pentru a stabili referințe mai precise, vom da definițiile enunțate mai jos.

De reținut

Se consideră un triunghi dreptunghic care conține un unghi ascuțit de măsură x, $0° < x < 90°$.

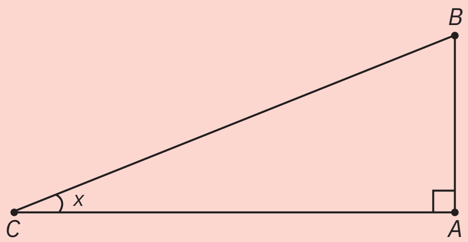
a. Raportul dintre lungimea catetei opuse unghiului x și lungimea ipotenuzei se numește *sinusul* unghiului x și se notează $\sin x$.

b. Raportul dintre lungimea catetei alăturate unghiului x și lungimea ipotenuzei se numește *cosinusul* unghiului x și se notează $\cos x$.

c. Raportul dintre lungimea catetei opuse unghiului x și lungimea catetei alăturate se numește *tangenta* unghiului x și se notează $\operatorname{tg} x$.

d. Raportul dintre lungimea catetei alăturate unghiului x și lungimea catetei opuse se numește *cotangenta* unghiului x și se notează $\operatorname{ctg} x$.

Cele patru valori: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ și $\operatorname{ctg} x$ se numesc *funcții trigonometrice* ale unghiului ascuțit x.



$$\sin x = \frac{AB}{BC} \qquad \cos x = \frac{AC}{BC}$$

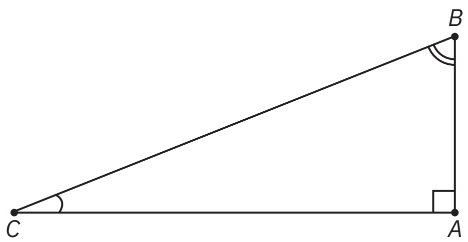
$$\operatorname{tg} x = \frac{AB}{AC} \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{AC}{AB}$$

Observații

1. Dacă unghiul C al triunghiului ABC, dreptunghic în A, are măsura x, relațiile anterioare se pot rescrie și astfel:

$$\sin C = \frac{AB}{BC};\quad \cos C = \frac{AC}{BC};\quad \operatorname{tg} C = \frac{AB}{AC};\quad \operatorname{ctg} C = \frac{AC}{AB}.$$

2. Sinusul fiecărui unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic este egal cu cosinusul celuilalt unghi ascuțit (și reciproc).



$$\left.\begin{aligned} \sin C &= \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuză}} = \frac{AB}{BC} \\ \cos B &= \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuză}} = \frac{AB}{BC} \end{aligned}\right| \Rightarrow \sin C = \cos B.$$

Altfel spus, sinusul unui unghi ascuțit este egal cu cosinusul complementului său, iar cosinusul unui unghi ascuțit este egal cu sinusul complementului său:

a. $\sin x = \cos(90° - x)$; **b.** $\cos x = \sin(90° - x)$.

3. Tangenta fiecărui unghi ascuțit este egală cu cotangenta complementului său și reciproc:

a. $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}(90° - x)$; **b.** $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(90° - x)$.

4. Tangenta unui unghi ascuțit este egală cu raportul dintre sinusul și cosinusul unghiului, iar cotangenta este egală cu raportul dintre cosinusul și sinusul unghiului (este inversa tangentei):

a. $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; **b.** $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$; **c.** $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$.

Exemple

1. Valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiului de 45°

Fie triunghiul dreptunghic isoscel ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, având catetele de lungime $AB = AC = a$, unde a este un număr real pozitiv (Figura 3). Aplicând teorema lui Pitagora, obținem:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

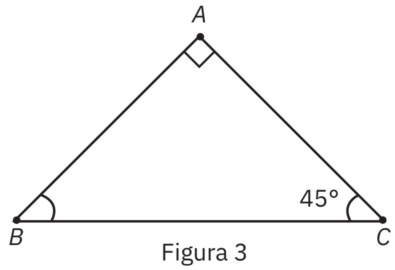


Figura 3

Obținem:

$\sin 45° = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\operatorname{tg} 45° = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{a}{a} = 1$
$\cos 45° = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\operatorname{ctg} 45° = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{a}{a} = 1$

2. Valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor de 30° și 60°

Fie triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $\sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle C = 30°$ și cateta $AB = a$, unde a este un număr real pozitiv (Figura 4). Deoarece lungimea catetei opuse unghiului de 30° este jumătate din lungimea ipotenuzei, rezultă $BC = 2a$. Aplicând teorema lui Pitagora, obținem:

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

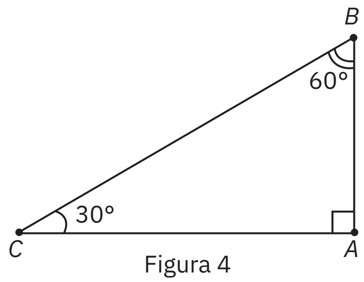


Figura 4

Atunci:

$\sin 30° = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{2}$	$\cos 30° = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\operatorname{tg} 30° = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{ctg} 30° = \dfrac{AC}{AB} = \sqrt{3}$
$\sin 60° = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{2}$	$\operatorname{tg} 60° = \dfrac{AC}{AB} = \sqrt{3}$	$\operatorname{ctg} 60° = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

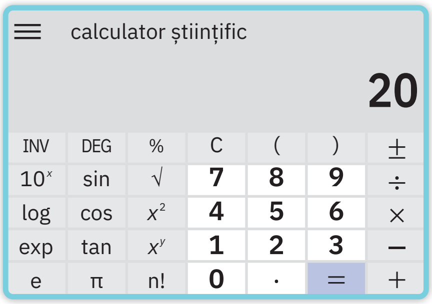
Valorile funcțiilor trigonometrice ale unui unghi ascuțit oarecare

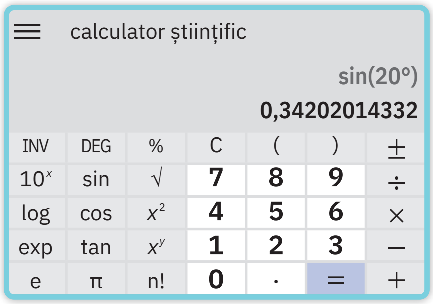
Pentru a determina valorile $\sin x$, $\cos x$ sau $\operatorname{tg} x$ (scris și $\tan x$ pe unele calculatoare) corespunzătoare unui unghi oarecare x, unde $0° < x < 90°$, putem folosi calculatorul științific. Valoarea $\operatorname{ctg} x$ se obține din faptul că inversa tangentei este cotangenta.

De exemplu, pentru a calcula $\sin 20°$ cu ajutorul calculatorului științific, vom proceda astfel:

- selectăm opțiunea (eticheta) DEG (grade hexazecimale) și tastăm apoi 20;
- odată ce pe ecran este scris 20, apăsăm tasta sin și obținem valoarea lui $\sin 20°$:

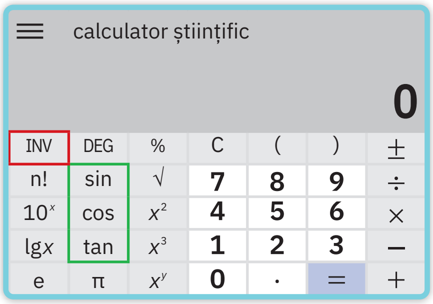
$$\sin 20° = 0{,}34202...$$

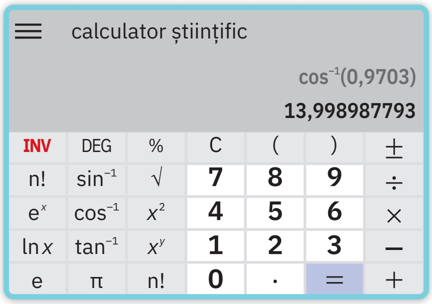




Cu ajutorul calculatorului științific, putem rezolva și problema inversă: fiind dată valoarea unei funcții trigonometrice a unui unghi, care este măsura unghiului?

Astfel, fiind dat un unghi x pentru care $\cos x = 0{,}9703$, vom apăsa mai întâi tasta INV, care face ca pe ecranul calculatorului să apară $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ și $\tan^{-1}$ în loc de sin, cos și tan. Scriem 0,9703, apoi apăsăm tasta $\cos^{-1}$ și obținem valoarea 13,99898... .





Rezultă că unghiul x, pentru care $\cos x = 0{,}9703$, are măsura aproximativ egală cu 14° (cu aproximare prin adaos).

Tabelul de valori al funcției sinus

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0°		0,017	0,035	0,052	0,070	0,087	0,105	0,122	0,139	0,156
10°	0,174	0,191	0,208	0,225	0,242	0,259	0,276	0,292	0,309	0,326
20°	0,342	0,358	0,375	0,391	0,407	0,423	0,438	0,454	0,469	0,485
30°	0,500	0,515	0,530	0,545	0,559	0,574	0,588	0,602	0,616	0,629
40°	0,643	0,656	0,669	0,682	0,695	0,707	0,719	0,731	0,743	0,755
50°	0,766	0,777	0,788	0,799	0,809	0,819	0,829	0,839	0,848	0,857
60°	0,866	0,875	0,883	0,891	0,899	0,906	0,914	0,921	0,927	0,934
70°	0,940	0,946	0,951	0,956	0,961	0,966	0,970	0,974	0,978	0,982
80°	0,985	0,988	0,990	0,993	0,995	0,996	0,997	0,998	0,9993	0,9998

Tabelul de valori al funcției tangentă

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0°		0,017	0,035	0,052	0,070	0,087	0,105	0,123	0,141	0,158
10°	0,176	0,194	0,213	0,231	0,249	0,268	0,287	0,306	0,325	0,344
20°	0,364	0,384	0,404	0,424	0,445	0,466	0,488	0,510	0,532	0,554
30°	0,577	0,601	0,625	0,649	0,675	0,700	0,727	0,754	0,781	0,810
40°	0,839	0,869	0,900	0,933	0,966	1,000	1,036	1,072	1,111	1,150
50°	1,192	1,235	1,280	1,327	1,376	1,428	1,483	1,540	1,600	1,664
60°	1,732	1,804	1,881	1,963	2,050	2,145	2,246	2,356	2,475	2,605
70°	2,747	2,904	3,078	3,271	3,487	3,732	4,011	4,331	4,705	5,145
80°	5,671	6,314	7,115	8,144	9,514	11,430	14,301	19,081	28,636	57,290

1. Valorile funcției cosinus se găsesc folosind formula $\cos n° = \sin(90 - n)°$ și tabelul cu valorile funcției sinus.
   Exemplu: $\cos 72° = \sin 18° \approx 0{,}309$.
2. Analog, utilizând formula $\text{ctg}\, n° = \text{tg}(90 - n)°$, putem determina și cotangenta unui unghi.
   Exemplu: $\text{ctg}\, 43° = \text{tg}\, 47° \approx 1{,}072$.

3. Cunoscând valoarea uneia dintre funcțiile trigonometrice ale unui unghi, putem determina valoarea aproximativă a măsurii acestuia. Valorile care nu apar în tabel se aproximează la cea mai apropiată valoare din tabel.
Exemplu: Știind că $\sin x = 0{,}734$, cea mai apropiată valoare din tabelul funcției sinus este 0,731. Deducem că unghiul x are aproximativ 47°.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Fie triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $BC = 10$ cm și $AC = 6$ cm (Figura 5). Calculați $\sin B$, $\sin C$, $\cos B$, $\cos C$, $\operatorname{tg} B$, $\operatorname{tg} C$, $\operatorname{ctg} B$, $\operatorname{ctg} C$.

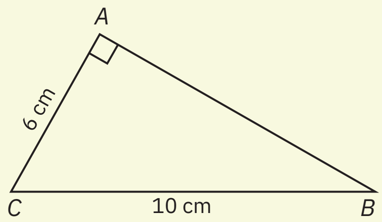


Figura 5

Rezolvare:
Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul ABC, rezultă $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = 8$ cm.
Utilizând definițiile funcțiilor trigonometrice, obținem:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{5};\quad \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5};\quad \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5};\quad \cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{5};$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4};\quad \operatorname{tg} C = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{3};\quad \operatorname{ctg} B = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{3};\quad \operatorname{ctg} C = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}.$$

2. În triunghiul ABC, dreptunghic în A, se cunosc $\sphericalangle B = 60°$ și $AC = 6$ cm (Figura 6). Calculați lungimile laturilor BC, AB și sinusul unghiului C.

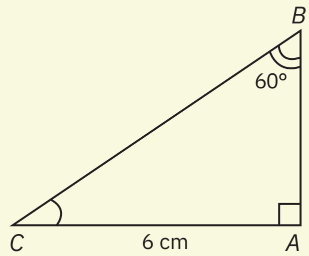


Figura 6

Rezolvare:

$$\sin B = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ și } \sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{BC} \Rightarrow BC = 4\sqrt{3} \text{ cm.}$$

$$\cos B = \cos 60° = \frac{1}{2} \text{ și } \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{4\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AB}{4\sqrt{3}} \Rightarrow AB = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$

$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}.$$

3. Un triunghi isoscel ABC are $AB = AC = 10$ cm și $BC = 12$ cm (Figura 7). Calculați sinusul unghiului BAC.

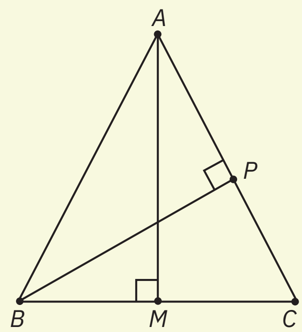


Figura 7

Rezolvare:
Ideea este să încadrăm unghiul BAC într-un triunghi dreptunghic. În acest scop, construim înălțimea BP a triunghiului ABC, $P \in BC$. Prin urmare, $\sin(\sphericalangle BAC) = \frac{BP}{AB}$.
Construim înălțimea AM, $M \in BC$. Calculând aria triunghiului în două moduri, avem $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot BP \cdot AC$, de unde rezultă că lungimea înălțimii BP este $BP = \frac{AM \cdot BC}{AC}$.
Triunghiul ABC este isoscel cu baza BC, așadar AM este și mediană, deci $BM = MC = 6$ cm.
Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul AMB, obținem: $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 8$ cm.
În concluzie, $BP = \frac{AM \cdot BC}{AC} = \frac{48}{5}$ cm, deci $\sin(\sphericalangle BAC) = \frac{BP}{AB} = \frac{24}{25}$.

Investigație

a. Cu ajutorul calculatorului științific, calculați, cu trei zecimale exacte, valorile funcțiilor sinus, cosinus, tangentă și cotangentă pentru unghiurile cu măsurile: 0°, 5°, 15°, 30°, 36°, 45°, 52°, 60°, 75°, 84°. Scrieți într-un tabel toate aceste valori.

b. Comparați valorile funcției sinus obținute pentru unghiurile cu măsurile de mai sus. Decideți dacă atunci când unghiurile devin din ce în ce mai mari, sinusurile măsurilor lor cresc sau scad.

c. Procedați la fel ca la **b**, comparând variația valorilor funcțiilor cosinus, tangentă și cotangentă calculate pentru unghiurile ale căror măsuri sunt precizate mai sus, atunci când acestea cresc.

d. Deduceți reguli generale pentru variația valorilor funcțiilor sinus, cosinus, tangentă și cotangentă a unghiurilor ascuțite, în funcție de creșterea sau descreșterea măsurilor acestor unghiuri.

e. Validați concluziile la care ați ajuns, comparându-le cu cele ale colegilor și discutându-le împreună cu profesorul, în timpul orei de matematică, apoi scrieți concluziile comune în portofoliul personal.

Probleme propuse

1. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$ (Figura 8), cu $AB = 4$ cm și $AC = 3$ cm. Completați spațiile libere astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

a. Lungimea laturii BC este egală cu ... .

b. $\sin B = ...$, $\cos B = ...$, $\operatorname{tg} B = ...$ și $\operatorname{ctg} B = ...$.

c. $\sin C = ...$, $\cos C = ...$, $\operatorname{tg} C = ...$ și $\operatorname{ctg} C = ...$.

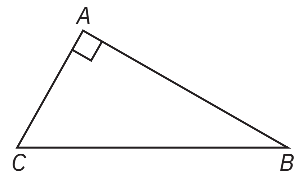


Figura 8

2. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$. Stabiliți corespondențele între datele de pe cele două rânduri, folosind dimensiunile laturilor triunghiului ABC precizate la fiecare subpunct:

$\sin B$	$\cos B$	$\sin C$	$\cos C$	$\operatorname{tg} B$	$\operatorname{ctg} B$	$\operatorname{tg} C$	$\operatorname{ctg} C$

$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$

a. $AB = 9$ cm și $BC = 15$ cm; **b.** $AC = 12$ cm și $BC = 20$ cm; **c.** $AB = 15$ cm și $AC = 20$ cm.

3. Fie triunghiul ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle B = 30°$ și $AB = 4\sqrt{3}$ cm.

a. Calculați AC și BC. **b.** Calculați lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei.

4. Fie triunghiul ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, $BC = 12$ cm și $\sin C = \frac{3}{4}$.

a. Calculați AB și AC. **b.** Calculați $\cos C$, $\operatorname{tg} C$ și $\operatorname{ctg} C$.

5. Fie triunghiul ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 12$ cm și $\cos B = \frac{12}{13}$.

a. Calculați AC și BC. **b.** Calculați $\sin B$, $\operatorname{tg} B$ și $\operatorname{ctg} B$.

6. În triunghiul dreptunghic ABC avem $\sphericalangle A = 90°$, $\operatorname{tg} B = \frac{3}{4}$ și $AC = 9$ cm.

a. Calculați perimetrul triunghiului ABC. **b.** Calculați $\sin C$, $\cos C$, $\operatorname{tg} C$ și $\operatorname{ctg} C$.

7. În triunghiul dreptunghic ABC avem $\sphericalangle B = 90°$, $\operatorname{tg} C = \frac{1}{2}$ și $BC = 4$ cm.

a. Calculați aria triunghiului ABC. **b.** Calculați lungimea înălțimii duse din B pe AC.

8. Fie triunghiul dreptunghic ABC, unde $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle B = 60°$ și $AD = 12$ cm, unde $AD \perp BC$, $D \in BC$. Calculați perimetrul triunghiului ABC.

9. În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$), fie D mijlocul laturii BC. Se cunosc $BD = 3$ cm și $\operatorname{tg} B = 2$.

a. Calculați AD și aria triunghiului ABC.

b. Calculați perimetrul triunghiului ABC.

c. Stabiliți valoarea de adevăr a afirmației: $\cos B < \frac{1}{2}$. Justificați răspunsul.

10. Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Știind că $\operatorname{tg} B = 0{,}75$ și $BC = 10$ cm, calculați perimetrul și aria triunghiului ABC.

11. În triunghiul dreptunghic ABC avem $\sphericalangle A = 90°$, iar $AD \perp BC$, $D \in BC$. Se știu $DC = 12$ cm și $\operatorname{tg} C = \frac{3}{4}$.

a. Determinați lungimile laturilor triunghiului ABC.

b. Calculați $\sin B + \cos B$.

12. În dreptunghiul $ABCD$, diagonala $AC = 16$ cm, iar $\sphericalangle ACB = 60°$.

a. Calculați lungimile laturilor dreptunghiului.

b. Calculați perimetrul și aria dreptunghiului.

c. $\sin(\sphericalangle CBM)$, unde M este mijlocul laturii CD.

13. Rombul $ABCD$ are diagonala $BD = 24$ cm și $\operatorname{tg}(\sphericalangle ABD) = \frac{4}{3}$ (Figura 9).

a. Arătați că $AC = 32$ cm.

b. Calculați aria și perimetrul rombului $ABCD$.

c. Calculați lungimea perpendicularei duse din B pe latura AD.

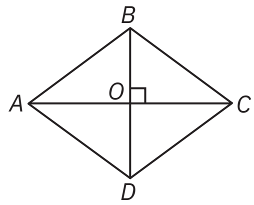


Figura 9

14. În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 16$ cm, $CD = 8$ cm, iar $AD = BC = 4\sqrt{2}$ cm.

a. Arătați că $\sphericalangle ABC = 45°$.

b. Calculați aria trapezului $ABCD$.

c. Calculați $\sin(\sphericalangle CAB)$.

15. Trapezul dreptunghic $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$ și $\sphericalangle B = 60°$, are $CD = 4\sqrt{3}$ cm și $AD = 6$ cm.

a. Determinați perimetrul trapezului.

b. Determinați lungimile diagonalelor AC și BD.

16. O cameră are forma unui trapez dreptunghic $ABCD$ (Figura 10). În zona hașurată este amenajat un dressing. Se știe că $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, $BE \parallel AD$, $EC = 4$ m, iar $AB = AD = x$ m, unde x este un număr natural mai mic decât 5.

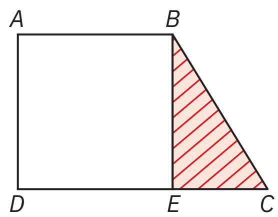


Figura 10

a. Calculați, în funcție de x, aria camerei $ABCD$.

b. Calculați x, dacă se știe că $ABCD$ are aria egală cu 24 m^2.

c. Considerăm $x = 4$. Din punctul D până la latura BC este așezată, prin pardoseală, o țeavă de lungime minimă. Arătați că unghiul format de această țeavă cu latura DC are cosinusul egal cu $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (Se consideră că țeava are grosimea neglijabilă.)

17. Curtea unei case are forma triunghiului ABC din figura 11. Zona hașurată este pavată cu dale, restul fiind acoperit cu gazon. Se știe că $AC = 15\sqrt{3}$ m, $AB = AD = DC$, iar $\sphericalangle ACD = 30°$.

a. Arătați că unghiul BAC este drept.

b. Calculați aria triunghiului ABC.

c. Calculați aria zonei acoperite cu pavaj.

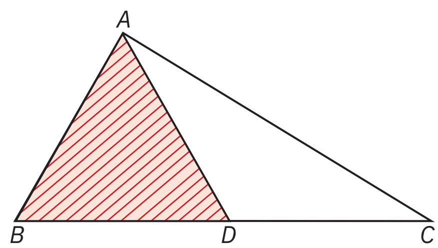


Figura 11

Minitest

1. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$. Dacă $AB = 15$ cm și $BC = 25$ cm, calculați AC, $\sin B$, $\cos C$, $\operatorname{tg} B$, $\operatorname{ctg} B$. **(3p)**

2. În triunghiul dreptunghic ABC se cunosc $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 6$ cm și $\cos B = \frac{3}{5}$.

a. Calculați perimetrul triunghiului ABC.

b. Calculați lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei. **(3p)**

3. În trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, se cunosc $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 60°$ și $AC \perp BC$. Dacă $BC = 24$ cm, determinați:

a. perimetrul trapezului; **b.** lungimile diagonalelor. **(3p)**

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

7.5

Lecția 5: Rezolvarea triunghiului dreptunghic. Calculul elementelor în poligoane regulate. Aproximarea în practică a distanțelor folosind relații metrice

Cuvinte-cheie

triunghi dreptunghic · triunghi echilateral · latură · catetă, ipotenuză · pătrat · apotemă · funcții trigonometrice · hexagon regulat · arie

Rezolvarea triunghiului dreptunghic

Mate practică

Energia eoliană sau energia vântului se captează cu ajutorul turbinelor eoliene, care transformă energia cinetică a vântului în energie electrică. Fiind o resursă inepuizabilă, energia vântului este o alternativă viabilă pentru energia obținută prin arderea combustibililor fosili (gaz, cărbune). Energia eoliană este nepoluantă, regenerabilă, iar costurile de utilizare și producție sunt reduse, în special dacă vorbim de asigurarea unei surse de energie într-un loc izolat, greu sau imposibil de conectat la rețelele de distribuție convenționale.

Deoarece energia eoliană crește odată cu viteza vântului, pentru amplasarea optimă a unei turbine eoliene este necesar să măsurăm viteza vântului la înălțimi mari deasupra solului. În acest scop, folosim un instrument numit anemometru.

În Figura 1, anemometrul se află în capătul C al unei bare de 7,7 metri lungime, care se ancorează cu ajutorul unui cablu de 8,5 metri.

La ce distanță de punctul A, în care se fixează această bară, trebuie ancorat cablul de susținere? Care este măsura unghiului format de cablul de susținere cu solul?

Ce observăm?

Analizând Figura 2, problema revine la a determina lungimea catetei AB și măsura unghiului B din triunghiul dreptunghic ABC, în care se cunosc $AC = 7{,}7$ m și $BC = 8{,}5$ m.

Aplicând teorema lui Pitagora, obținem:

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{12{,}96}\text{ m} = 3{,}6\text{ m}.$$

Deoarece $\sin B = \dfrac{AC}{BC} \simeq 0{,}905$, din tabelul valorilor funcției trigonometrice sinus de la lecția anterioară, deducem că unghiul B are aproximativ 65°.

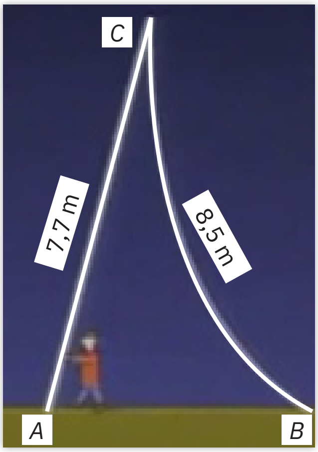


Figura 1

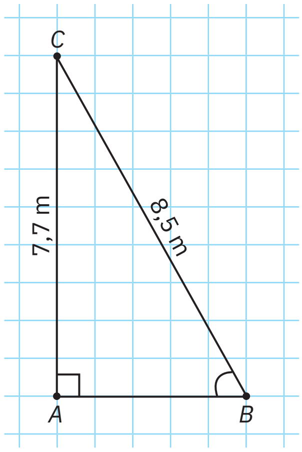


Figura 2

De reținut

Prin *rezolvarea unui triunghi* se înțelege determinarea lungimilor celor trei laturi și a măsurilor celor trei unghiuri ale triunghiului.

În cazul unui triunghi dreptunghic, pentru rezolvarea triunghiului este suficient să cunoaștem lungimile a două laturi ale triunghiului sau lungimea unei laturi și măsura unuia dintre unghiurile ascuțite (sau valoarea unei funcții trigonometrice a unghiului respectiv).

Pentru rezolvarea unui triunghi dreptunghic, putem proceda astfel:

a. dacă se cunosc lungimile a două laturi:
- determinăm lungimea celei de-a treia laturi cu teorema lui Pitagora;
- aflăm cele două unghiuri ascuțite calculând o funcție trigonometrică a unui unghi.

b. dacă se cunoaște lungimea unei laturi și măsura unui unghi ascuțit:
- aflăm celălalt unghi ascuțit, știind că este complementul unghiului cunoscut;
- determinăm lungimile laturilor utilizând acele funcții trigonometrice ale unghiului cunoscut în care intervine și lungimea laturii cunoscute.

Exemplu

În Figura 3 se dă triunghiul *ABC*, dreptunghic în *A*, în care se cunosc $AC = 5\sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle B = 60°$.

Evident, $\sphericalangle C = 90° - \sphericalangle B = 30°$.

Pentru a afla lungimile laturilor *AB* și *BC*, utilizăm funcțiile trigonometrice ale unghiului *B*, în care intervine latura cunoscută, *AC*:

$$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \operatorname{tg} 60° = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{AB}, \text{ adică } AB = 5 \text{ cm};$$

$$\sin B = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \sin 60° = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{BC}, \text{ de unde } BC = 10 \text{ cm}.$$

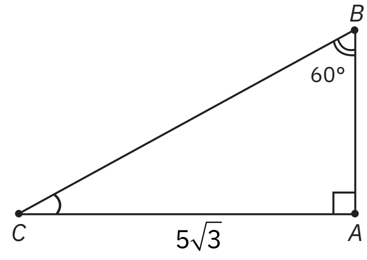


Figura 3

Observație

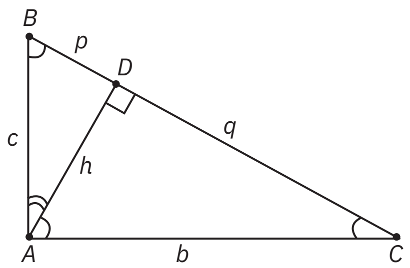


Figura 4

Fie *ABC* un triunghi dreptunghic cu $\sphericalangle A = 90°$, în care am construit înălțimea *AD*, $D \in BC$ (Figura 4).

Notăm: $BC = a \quad AD = h$
$AC = b \quad BD = p$
$AB = c \quad CD = q$

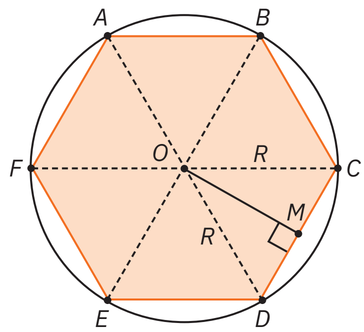
În general, triunghiul *ABC* se poate rezolva când se cunosc:
- oricare două dintre valorile *a*, *b*, *c*, *h*, *p*, *q*;
- una dintre valorile *a*, *b*, *c*, *h*, *p*, *q* și măsura unuia dintre unghiurile *B* sau *C* (sau o funcție trigonometrică a acestui unghi).

Calculul elementelor (latură, perimetru, apotemă, arie) în triunghiul echilateral, în pătrat și în hexagonul regulat

Un poligon regulat este un poligon convex cu toate laturile congruente și cu toate unghiurile congruente. De exemplu, un triunghi echilateral este un poligon regulat cu trei laturi, iar un pătrat este un poligon regulat cu patru laturi.

Orice poligon regulat se poate înscrie într-un cerc. Centrul cercului circumscris este și centrul poligonului regulat.

Segmentul care unește centrul poligonului cu mijlocul unei laturi se numește *apotema* poligonului. În context metric (al calculului de distanțe), prin apotemă vom înțelege și distanța de la centrul poligonului la fiecare dintre laturile sale.



Apotema hexagonului regulat *ABCDEF* este *OM*.

Fiind dat un poligon regulat cu *n* laturi, notăm:
- l_n = lungimea laturii poligonului;
- u_n = măsura unui unghi al poligonului;
- a_n = lungimea apotemei;
- $\mathcal{P}_n$ = perimetrul poligonului;
- $\mathcal{A}_n$ = aria poligonului.

Sunt evidente următoarele relații:

$$u_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180°; \qquad \mathcal{P}_n = n \cdot l_n; \qquad \mathcal{A}_n = \frac{1}{2} n \cdot a_n \cdot l_n.$$

Latura, perimetrul, aria și apotema unui triunghi echilateral

Fie triunghiul echilateral *ABC*, înscris în cercul de centru *O* și rază *R*, cu apotema *OM*, $M \in AB$ (Figura 5). Unghiul la centru *AOB* are măsura de 120° și, întrucât triunghiul *OAB* este isoscel, având $OA = OB = R$, rezultă $\sphericalangle OAM = 30°$.

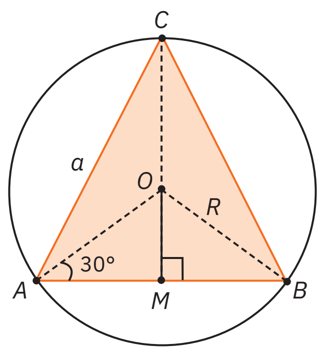


Figura 5

Folosind funcțiile trigonometrice în triunghiul OAM, obținem:

$$\sin 30^\circ = \frac{OM}{OA} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{OM}{R} \Rightarrow OM = \frac{R}{2};$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AM}{OA} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AM}{R} \Rightarrow AM = \frac{R\sqrt{3}}{2}, \text{ deci } AB = R\sqrt{3}.$$

De reținut

Elementele triunghiului echilateral (în funcție de raza cercului circumscris)

latura (l_3)	perimetrul ($\mathcal{P}_3$)	apotema (a_3)	înălțimea	aria ($\mathcal{A}_3$)
$R\sqrt{3}$	$3R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{3R}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

Latura, perimetrul, aria și apotema unui pătrat

Considerăm pătratul $ABCD$, de latură a, înscris în cercul de centru O și rază R, în care am construit apotema OM, cu $M \in BC$ (Figura 6).

Triunghiul OBC este dreptunghic isoscel, de catete $OB = OC = R$.

Cu teorema lui Pitagora, avem $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = R\sqrt{2}$, deci aria pătratului este:

$$\mathcal{A}_{ABCD} = BC^2 = 2R^2.$$

OM este mediană în triunghiul OBC, deci $OM = \frac{BC}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

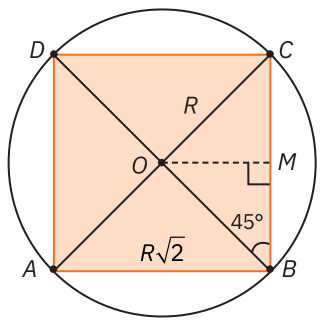


Figura 6

De reținut

Elementele pătratului (în funcție de raza cercului circumscris)

latura (l_4)	perimetrul ($\mathcal{P}_4$)	apotema (a_4)	aria ($\mathcal{A}_4$)
$R\sqrt{2}$	$4R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$2R^2$

Latura, perimetrul, aria și apotema unui hexagon regulat

Fie hexagonul regulat $ABCDEF$, de latură a, înscris în cercul de centru O și rază R (Figura 7). Fiecare unghi la centru opus unei laturi are 60°, deci diagonalele mari AD, BE și CF împart hexagonul în șase triunghiuri echilaterale.

Atunci $BC = OB = R$ și, considerând apotema OM, cu $M \in BC$, obținem:

$$OM = R\sin 60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Aria hexagonului este:

$$\mathcal{A}_{ABCDEF} = 6 \cdot \mathcal{A}_{OBC} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot OM \cdot BC = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}.$$

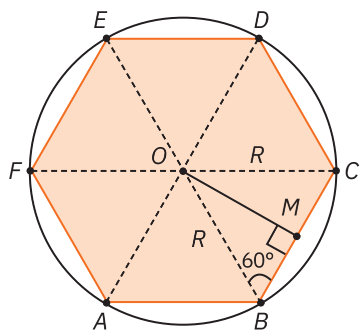


Figura 7

De reținut

Elementele hexagonului regulat (în funcție de raza cercului circumscris)

latura (l_6)	perimetrul ($\mathcal{P}_6$)	apotema (a_6)	aria ($\mathcal{A}_6$)
R	$6R$	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

Aproximarea în practică a distanțelor folosind relații metrice

În situațiile întâlnite în viața de zi cu zi avem deseori nevoie să estimăm distanțe și suprafețe, în care intervin una sau mai multe variabile.

Dacă trebuie să amenajăm o grădină sau să realizăm instalația electrică a unei camere, trebuie să cunoaștem, încă din etapa de proiectare, valori precum perimetrul, aria etc. Astfel, vom putea determina din start cantitatea de materiale necesare pentru a ne pune în practică ideile, ceea ce ne va permite să economisim timp și să reducem costurile.

Exemple

1. Scara de incendiu

O scară de incendiu de 100 dm este sprijinită de un perete. Distanța pe sol dintre piciorul scării și perete este de 60 dm.

La ce înălțime față de sol se află capătul de sus al scării?

Rezolvare:

Aplicând teorema lui Pitagora, determinăm locul unde se află capătul de sus al scării: la $\sqrt{10^2-6^2}=\sqrt{64}=8$ metri deasupra solului.

2. Cablul TV

Podeaua camerei lui Vlad are formă dreptunghiulară, având dimensiunile direct proporționale cu 4 și 7. Aria podelei camerei este egală cu 17,92 metri pătrați.

Un cablu TV trebuie instalat prin podea, pe diagonala camerei.

Stabiliți dacă 6 metri de cablu sunt suficienți. Dar 6,5 metri?

Rezolvare:

Dimensiunile camerei sunt $l=4x$ și $L=7x$, unde $x>0$ este un număr real.

Din $L\cdot l=17{,}92$, rezultă $28x^2=17{,}92$, de unde $x^2=0{,}64$, adică $x=0{,}8$. Obținem $l=3{,}2$ m și $L=5{,}6$ m.

Cu teorema lui Pitagora, rezultă că diagonala camerei are lungimea $d=\sqrt{L^2+l^2}=\sqrt{41{,}6}$ m.

Întrucât $6^2=36<41{,}6<42{,}25=6{,}5^2$, rezultă că 6 metri de cablu nu ajung, dar 6,5 metri sunt suficienți.

3. Estimarea lungimii gardului unei grădini

Grădina schițată în Figura 8 are forma unui trapez isoscel $ABCD$, cu $AB \parallel CD$ și $AB>CD$, în care $CD=12$ m și $\sphericalangle B=60°$. Grădina este străbătută de două alei care reprezintă diagonalele trapezului, aleea AC împărțind unghiul A în două unghiuri de măsuri egale.

În partea superioară, grădina se prelungește cu un iaz sub forma unui semidisc de diametru AB.

Verificați dacă pentru a împrejmui grădina și iazul ajung 74 de metri de gard. Se știe că $3{,}14<\pi<3{,}15$.

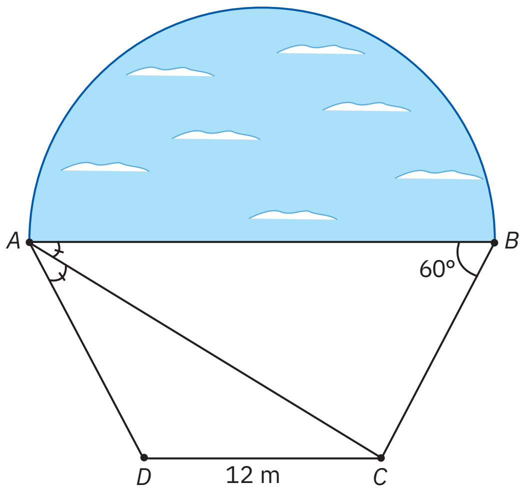


Figura 8

Rezolvare:

Unghiurile adiacente fiecărei baze a trapezului sunt congruente, deci $\sphericalangle DAB=60°$, de unde rezultă că $\sphericalangle DAC=\sphericalangle CAB=30°$. Întrucât $\sphericalangle ADC=\sphericalangle BCD=180°-\sphericalangle ABC=120°$, rezultă că $\sphericalangle ACD=30°=\sphericalangle DAC$, ceea ce înseamnă că triunghiul DAC este isoscel. Deducem că $AD=DC=12$ m, deci și $BC=12$ m.

În triunghiul ABC, avem $\sphericalangle CAB=30°$ și $\sphericalangle ABC=60°$, deci $\sphericalangle ACB=90°$. Ca urmare, triunghiul ABC este dreptunghic. Din $\cos B=\frac{BC}{AB}$ obținem $AB=\frac{BC}{\cos 60°}=24$ m.

Lungimea semicercului de diametru AB este $L=\frac{1}{2}\pi\cdot AB=12\pi$ metri. Ca urmare, perimetrul grădinii este $P=L+AD+DC+CB=12(\pi+3)$ metri.

Deoarece $12(\pi+3)<12\cdot(3{,}15+3)=12\cdot 6{,}15=73{,}8$, rezultă că 74 de metri de gard sunt suficienți pentru împrejmuirea grădinii.

Proiect

Determinarea înălțimii unei clădiri inaccesibile și a distanței până la un punct inaccesibil

În Figura 9, segmentul AB' reprezintă o clădire înaltă care este inaccesibilă, segmentele CC' și DD' reprezintă pozițiile în care se află o persoană, la momente diferite de timp, solul fiind pe dreapta $B'C'$, iar linia orizontală a privirii observatorului fiind dreapta CD. Atunci când este în poziția CC', observatorul vede vârful clădirii sub un unghi de $x°$, iar când se află în poziția DD', vede vârful clădirii sub un unghi de $y°$. Se cunosc lungimea segmentului CD, $\sphericalangle ACB = x°$ și $\sphericalangle ADB = y°$.

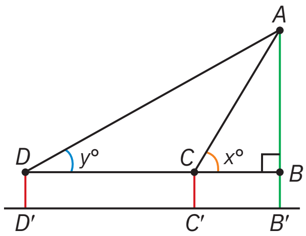


Figura 9

Pentru a face calculele, puteți folosi următorul model:

Determinăm înălțimea clădirii AB', dacă $\sphericalangle ACB = 60°$, $\sphericalangle ADB = 30°$ și $CD = 112$ m, iar observatorul are înălțimea $CC' = DD' = 1{,}65$ m. Folosim faptul că $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$.

- Din triunghiul dreptunghic ABC ($\sphericalangle B = 90°$), avem $\sqrt{3} = \text{tg}(\sphericalangle ACB) = \frac{AB}{BC}$, deci $AB = \sqrt{3} \cdot BC$.
- Din triunghiul dreptunghic ABD ($\sphericalangle B = 90°$), avem $\frac{\sqrt{3}}{3} = \text{tg}(\sphericalangle ADB) = \frac{AB}{BD}$, deci $AB = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot BD$.
- $\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot BD = \sqrt{3} \cdot BC$, deci $CD + BC = BD = 3 \cdot BC$. Obținem $BC = CD : 2 = 56$ m și $AB = \sqrt{3} \cdot 56$ m, așadar $AB \simeq 1{,}73 \cdot 56 \text{ m} = 96{,}88$ m, deci clădirea are aproximativ $96{,}88 \text{ m} + 1{,}65 \text{ m} = 98{,}53$ m și, cunoscând că $BC = 56$ m, putem afla distanța de la orice punct în care se află observatorul la clădire.

Ce veți urmări în cadrul proiectului:
- identificarea unor clădiri sau obiecte inaccesibile din viața cotidiană, cărora doriți fie să le estimați înălțimea, fie să determinați o aproximare cât mai bună a distanței până la acestea;
- alegerea unor unghiuri cât mai convenabile, folosind algoritmul din modelul anterior, astfel încât calculele necesare aproximărilor să fie cât mai simple;
- parcurgerea cu atenție a etapelor necesare pentru determinarea înălțimilor clădirilor sau obiectelor alese, precum și a distanțelor până la acestea.

Prezentare: realizați o prezentare PowerPoint, cu imagini și text.

Evaluare: Se va ține cont de acuratețea prezentării și de gradul de apropiere a rezultatelor obținute de cele reale, de calitatea răspunsurilor oferite la întrebările colegilor în urma prezentării proiectului.

Probleme propuse

1. În triunghiul ABC din Figura 10 se cunosc: $\sphericalangle A = 90°$, AC = 6 cm și $\sphericalangle B = 60°$. Rezolvați triunghiul ABC.

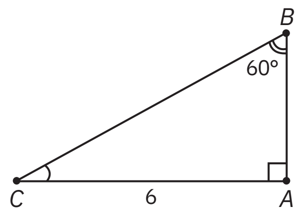


Figura 10

2. Rezolvați triunghiul ABC, știind că $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle C = 30°$ și $BC = 8$ cm.
3. Rezolvați triunghiul ABC, știind că $\sphericalangle A = 90°$ și $AB = AC = 12$ cm.
4. Rezolvați triunghiul dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$), știind că:
   a. $AB = 12$ cm și $BC = 20$ cm;
   b. $AC = 12$ cm și $AB = 16$ cm;
   c. $AC = 2\sqrt{3}$ cm și $BC = 4\sqrt{3}$ cm;
   d. $BC = 8$ cm și $\sphericalangle B = 45°$.
5. În triunghiul ABC din Figura 11 se cunosc: $\sphericalangle A = 90°$, $AC = 15$ cm și $AD = 12$ cm. Rezolvați triunghiul ABC.

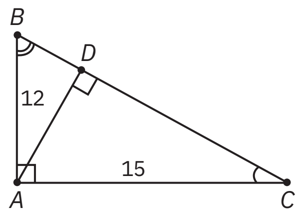


Figura 11

6. Rezolvați triunghiul dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$), știind că: $AD \perp BC$, $D \in BC$, $BD = 4$ cm și $CD = 9$ cm.
7. Rezolvați triunghiul dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$), $AD \perp BC$, $D \in BC$, știind că:
   a. $AD = 4\sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle B = 30°$;
   b. $CD = 6\sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle C = 30°$.
8. Desenați un pătrat cu latura de 2 cm, apoi desenați cercul circumscris pătratului.
   a. Calculați diagonala pătratului.
   b. Calculați apotema și raza cercului circumscris pătratului.

9. Desenați un triunghi echilateral ABC cu latura de 4 cm, apoi desenați cercul circumscris triunghiului.
   a. Calculați înălțimea triunghiului.
   b. Calculați perimetrul și aria triunghiului.
   c. Calculați apotema și raza cercului circumscris triunghiului.

10. Se consideră un triunghi echilateral XYZ cu apotema de 12 cm.
    a. Calculați latura triunghiului.
    b. Calculați perimetrul și aria triunghiului.
    c. Calculați înălțimea și raza cercului circumscris triunghiului.

11. Hexagonul regulat $ABCDEF$ se înscrie în cercul $\mathcal{C}(O, R)$. Dacă $AB = 6$ cm, determinați R și apotema hexagonului.

12. Completați tabelele următoare:

a.

R		$2\sqrt{3}$			
l_3	4				
a_3				$\sqrt{3}$	
$\mathcal{P}_3$			36		
$\mathcal{A}_3$					$9\sqrt{3}$

b.

R		$6\sqrt{2}$			
l_4	4				
a_4				$2\sqrt{3}$	
$\mathcal{P}_4$			24		
$\mathcal{A}_4$					100

c.

R			$4\sqrt{3}$		
l_6	6				
a_6				$5\sqrt{3}$	
$\mathcal{P}_6$		18			
$\mathcal{A}_6$					$96\sqrt{3}$

13. Un triunghi echilateral și un pătrat au același perimetru. Triunghiul are latura egală cu 6 cm.
    a. Determinați apotema, raza cercului circumscris triunghiului și aria acestuia.
    b. Determinați latura, apotema și raza cercului circumscris pătratului.

14. Calculați aria hexagonului regulat care are latura egală cu apotema pătratului cu perimetrul de 32 cm.

15. În Figura 12 este prezentată o piesă dintr-un joc pentru copii. $ABCDEF$ este un hexagon regulat înscris în cercul cu centrul în O. Jumătate dintre triunghiuri sunt colorate cu albastru. Latura hexagonului este egală cu 2 cm.
    a. Calculați aria suprafeței colorate cu mov.
    b. Calculați lungimea segmentului AE.
    c. Arătați că aria discului este mai mare decât aria hexagonului cu mai mult de 2 cm^2. Se consideră cunoscut că $3{,}14 < \pi < 3{,}15$ și $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$.

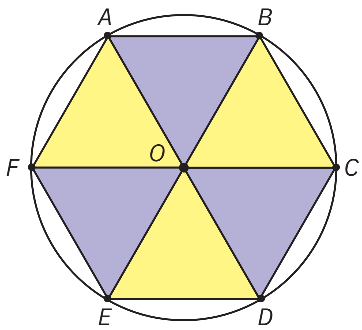


Figura 12

16. Grădina casei lui Tudor este schițată în Figura 13. Punctul A aparține semicercului BC. Pe suprafața pe suprafața verde sunt plantați pomi fructiferi, iar zona hașurată este acoperită cu flori. Se cunosc $AB = 48$ m și $AC = 36$ m.
    a. Calculați raza semicercului $\overset{\frown}{BC}$.
    b. Calculați aria zonei acoperite cu flori.
    c. Se instalează un bec de iluminat în punctul M, mijlocul laturii AC. Becul este alimentat printr-un fir bine întins, din punctul B. Calculați sinusul unghiului $\sphericalangle MBC$.

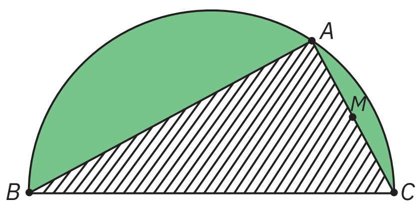


Figura 13

Autoevaluare

1. Rezolvați triunghiul ABC, știind că $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle B = 30°$ și $BC = 12$ cm. (3p)
2. Rezolvați triunghiul dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$), știind că: $AD \perp BC$, $D \in BC$, $BD = 8$ cm și $CD = 18$ cm. (3p)
3. Un pătrat este înscris într-un cerc cu raza de 12 cm.
   a. Determinați perimetrul și aria pătratului.
   b. Determinați aria triunghiului echilateral înscris în același cerc cu pătratul. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Recapitulare și evaluare

Proiecții ortogonale pe o dreaptă. Teorema înălțimii. Teorema catetei • Teorema lui Pitagora; reciproca teoremei lui Pitagora • Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic • Rezolvarea triunghiului dreptunghic. Calculul elementelor în poligoane regulate. Aproximarea în situații practice a distanțelor folosind relații metrice

Pentru exercițiile 1-22, notați în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect. Pentru exercițiile 23-30, scrieți rezolvările complete.

1. Într-un triunghi dreptunghic, lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză sunt egale cu 4 cm și 6 cm. Lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este egală cu:

a. 10 cm; **b.** $2\sqrt{6}$ cm.

2. Într-un triunghi dreptunghic, lungimea unei catete este egală cu 8 cm și lungimea proiecției catetei pe ipotenuză este egală cu 2 cm. Lungimea ipotenuzei este egală cu:

a. 32 cm; **b.** 16 cm.

3. Într-un triunghi dreptunghic, lungimea ipotenuzei este de 20 cm, iar lungimea unei catete de 16 cm. Lungimea celeilalte catete este:

a. 4 cm; **b.** 12 cm; **c.** 18 cm; **d.** 36 cm.

4. Rezultatul calculului $\sin 30° + \cos 60°$ este egal cu:

a. 0; **b.** $\sqrt{3}$; **c.** $\frac{1}{2}$; **d.** 1.

5. Triunghiul MNP este dreptunghic, cu $\sphericalangle N = 90°$, $MN = 9$ cm, $MP = 15$ cm. Tangenta unghiului P este egală cu:

a. $\frac{3}{5}$; **b.** $\frac{3}{4}$; **c.** $\frac{4}{3}$; **d.** $\frac{4}{5}$.

6. Într-un triunghi dreptunghic isoscel, lungimea unei catete este de 4 cm. Lungimea ipotenuzei este egală cu:

a. 8 cm; **b.** $4\sqrt{3}$ cm; **c.** $4\sqrt{2}$ cm; **d.** 16 cm.

7. Într-un pătrat, lungimea diagonalei este egală cu 16 cm. Perimetrul pătratului este egal cu:

a. $32\sqrt{2}$ cm; **b.** 64 cm.

8. Lungimea înălțimii unui triunghi echilateral cu lungimea laturii de 12 cm este egală cu:

a. $4\sqrt{3}$ cm; **b.** $6\sqrt{3}$ cm; **c.** $4\sqrt{5}$ cm; **d.** $4\sqrt{2}$ cm.

9. În triunghiul isoscel DEF de bază $EF = 8$ cm, lungimea înălțimii corespunzătoare bazei este 3 cm. Lungimea înălțimii corespunzătoare laturii DF este egală cu:

a. 15 cm; **b.** $\frac{20}{3}$ cm; **c.** $\frac{24}{5}$ cm; **d.** 20 cm.

10. Dimensiunile unui dreptunghi sunt egale cu 4 cm și 8 cm. Lungimea diagonalei dreptunghiului este egală cu:

a. 32 cm; **b.** $4\sqrt{5}$ cm; **c.** $2\sqrt{5}$ cm; **d.** $4\sqrt{3}$ cm.

11. În triunghiul ABC isoscel, de bază BC, măsura unghiului BAC este egală cu 120°. Tangenta unghiului ABC este egală cu:

a. $\sqrt{3}$; **b.** $\frac{1}{2}$; **c.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **d.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

12. Un romb are diagonalele cu lungimile de 24 cm și 10 cm. Perimetrul rombului este egal cu:

a. 52 cm; **b.** 34 cm; **c.** 68 cm; **d.** 72 cm.

13. În paralelogramul $ABCD$, $\sphericalangle DAB = 60°$, $BD \perp AD$ și $AB = 20$ cm. Lungimea diagonalei BD este egală cu:

a. $10\sqrt{5}$ cm; **b.** $10\sqrt{3}$ cm; **c.** 10 cm; **d.** 20 cm.

14. În triunghiul MNP, dreptunghic în N, NQ este înălțime, $MN = 15$ cm, $MQ = 9$ cm. Perimetrul triunghiului MNP este egal cu:

a. 45 cm; **b.** 30 cm; **c.** 60 cm; **d.** 90 cm.

15. În triunghiul ABC, dreptunghic în A, $AB = 5$ cm, $\text{tg}\, C = 0{,}2$. Lungimea ipotenuzei este egală cu:

a. $10\sqrt{6}$ cm; **b.** $5\sqrt{26}$ cm; **c.** $\sqrt{26}$ cm; **d.** 20 cm.

16. În triunghiul ABC, dreptunghic în A, $AB = 3$ cm, $\sin C = 0{,}6$. Lungimea ipotenuzei este egală cu:

a. $\sqrt{34}$ cm; **b.** $\sqrt{5}$ cm; **c.** 5 cm; **d.** 1,8 cm.

17. Aria unui triunghi cu lungimea ipotenuzei de 15 cm și lungimea unei catete de 9 cm este egală cu:

a. 54 cm^2; **b.** 108 cm^2; **c.** 72 cm^2; **d.** 64 cm^2.

18. În triunghiul ABC avem $AC = 4\sqrt{3}$ cm, $AB = 4$ cm și $BC = 8$ cm. Măsura unghiului ACB este egală cu:

a. 30°; **b.** 60°; **c.** 20°; **d.** 90°.

19. Într-un trapez dreptunghic, lungimile bazelor sunt de 4 cm și 10 cm, iar înălțimea de 8 cm. Perimetrul trapezului este egal cu:

a. 32 cm; **b.** 56 cm; **c.** 2 cm; **d.** 90 cm.

20. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A și $AD \perp BC$, $D \in BC$, $BD = 4$ cm și $DC = 12$ cm. Lungimea catetei AC este egală cu:

a. $8\sqrt{3}$ cm; **b.** 8 cm; **c.** 6 cm; **d.** 16 cm.

21. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A și $AD \perp BC$, $D \in BC$. Dacă $\sphericalangle ACB = 30°$, atunci $\sin BAD$ este egal cu:

a. 0,5; **b.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **c.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **d.** 1.

22. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A și $AD \perp BC$, $D \in BC$. Dacă $\sin ABC = \frac{3}{5}$, atunci $\cos BAD$ este egal cu:

a. $\frac{5}{3}$; **b.** $\frac{3}{5}$; **c.** $\frac{4}{5}$; **d.** $\frac{5}{4}$.

23. Precizați care dintre enunțurile de mai jos este adevărat și care este fals:

a. „Numerele 12, 15 și 9 sunt sunt numere pitagoreice.”

b. „Proiecția unui segment pe o dreaptă este un segment sau un punct.”

c. „Lungimea unui segment este întotdeauna mai mare decât lungimea proiecției sale pe o dreaptă.”

d. „Suma pătratelor lungimilor diagonalelor unui romb este de 4 ori mai mare decât pătratul lungimii unei laturi.”

24. Se consideră triunghiul MPQ, dreptunghic în P, și $PD \perp MQ$, $D \in MQ$. Asociați fiecărei teoreme menționate în coloana **A** relația corespunzătoare din coloana **B**.

A	**B**
1. Teorema înălțimii	**a.** $PM^2 + PQ^2 = MQ^2$
2. Teorema catetei	**b.** $PD^2 = DM \cdot DQ$
3. Teorema lui Pitagora	**c.** $PQ^2 = QD \cdot QM$
	d. $PM^2 = PD \cdot DM$

25. Se consideră un triunghi ABC, dreptunghic în A. Determinați numerele a, b, c și d din tabelul de mai jos:

AB	AC	BC
a cm	16 cm	20 cm
15 cm	b cm	25 cm
6 cm	8 cm	c cm
d cm	d cm	10 cm

26. Determinați numerele a, b, c și d care verifică egalitățile din tabelul de mai jos.

$\sin 30° = \frac{2}{a}$	$\cos b° = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\operatorname{tg} 30° = \frac{4}{c}$

27. În triunghiul ABC, dreptunghic în A, se cunosc $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle B = 60°$ și $BC = 6$ cm.

a. Calculați lungimea laturilor AB și AC.

b. Calculați lungimea proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

c. Determinați aria triunghiului ABC, rotunjită la cel mai apropiat întreg.

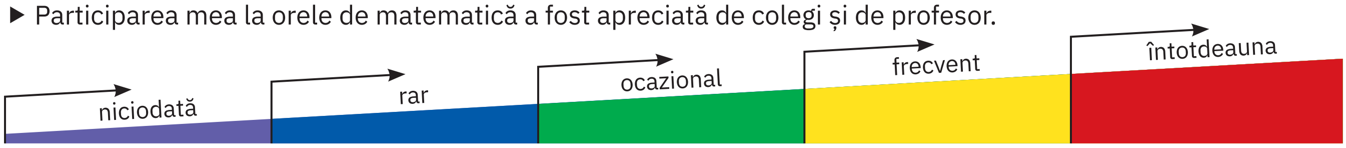
28. În trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 5\sqrt{3}$ cm, $DC = 15\sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle C = 30°$. Calculați aria și perimetrul trapezului $ABCD$.

29. Se consideră rombul $ABCD$, cu $AC = 10\sqrt{3}$ cm și $BD = 10$ cm. Determinați perimetrul rombului $ABCD$ și măsura unghiului BAD.

30. În trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 4$ cm, $DC = 12$ cm și $BD = 10$ cm. Calculați aria trapezului $ABCD$ și distanța de la punctul D la dreapta BC.

Fișa de observare sistematică

- Am fost preocupat să aflu lucruri noi despre metodele de rezolvare a problemelor.
- Participarea mea la orele de matematică a fost apreciată de colegi și de profesor.



Soluții

Unitatea 1. Mulțimea numerelor reale

Lecția 1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional

1. **a**, **d**, **e**, **f**, **h**, **i**. **2.** 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144. **4.a.** *A*; **b.** *F*; **c.** *A*; **d.** *F*; **e.** *F*; **f.** *A*. **5.a.** 5; **b.** 9; **c.** 1; **d.** 20; **e.** 24; **f.** 30. **6.a.** 8; **b.** 4; **c.** 5; **d.** 29. **7.a.** 52; **b.** 29; **c.** 121; **d.** 50. **8.a.** 3; **b.** 14; **c.** 45; **d.** 25; **e.** 512; **f.** 16; **g.** 243. **9.a.** 9; **b.** 9; **c.** 27. **10.a.** 25; **b.** 4; **c.** 6; **d.** 5. **11.a.** $a=36$, $\sqrt{a}=6$; **b.** $a=9$, $\sqrt{a}=3$; **c.** $a=369^2$, $\sqrt{a}=369$. **12.a.** 6; **b.** 15; **c.** 100; **d.** 20; **e.** 75; **f.** 216. **13.a.** 3; **b.** 6; **c.** 44; **d.** 2. **14.a.** 18; **b.** 80; **c.** 225; **d.** 30^{10}; **e.** $2^4\cdot 3^5$; **f.** $7^8\cdot 10^{14}$. **15.a.** 1; **b.** 1. **16.a.** B; **b.** H; **c.** C; **d.** A; **e.** D; **f.** G. **17.a.** 0,2; **b.** 0,6; **c.** 0,01; **d.** 1,6; **e.** 1,2; **f.** 3,2. **18.a.** 72; **b.** 0,24; **c.** 1,2; **d.** 0,14; **e.** 0,65; **f.** 0,625.

Minitest: **1.a.** 4; **b.** 1,8; **c.** 6; **d.** 1. **2.a.** 0. **3.a.** $\sqrt{a}=2^2\cdot 3^2\cdot 5^2=900$; **b.** $\sqrt{a}=17\cdot 3=51$; **c.** $\sqrt{a}=6^2\cdot 8=288$.

Lecția 2. Mulțimea numerelor reale

1.a. 0; 7; **b.** -6; 0; 7; -10; **c.** -6; 0; $-2{,}8$; $\frac{4}{3}$; 7; -10; 5,4(12); **d.** $\sqrt{5}$; $-\sqrt{6}$; $\sqrt{15}$; **e.** toate. **2.a.** *A*; **b.** *F*; **c.** *F*; **d.** *A*; **e.** *A*; **f.** *A*. **3.a.** *A*; **b.** *A*; **c.** *F*; **d.** *A*; **e.** *A*; **f.** *A*; **g.** *A*; **h.** *A*. **4.a.** 2,2 și 8,6; **b.** 2,65 și 8,25; **c.** 4,123 și 14,799. **7.a.** *A*; **b.** *A*; **c.** *F*; **d.** *A*; **e.** *F*; **f.** *F*; **g.** *A*; **h.** *A*. **8.a.** $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}\in\mathbb{Q}$; **b.** $\sqrt{\frac{25}{81}}=\frac{5}{9}\in\mathbb{Q}$; **c.** $\sqrt{\frac{121}{16}}=\frac{11}{4}\in\mathbb{Q}$; **d.** $\sqrt{0{,}81}=0{,}9\in\mathbb{Q}$. **9.a.** rațional; **b**, **c**, **d.** iraționale. **10.** $A\cap\mathbb{N}=\{0\}$, $A\cap\mathbb{Z}=\{-6;0\}$, $A\cap\mathbb{Q}=\left\{-6;\frac{3}{4};3,(4);0;1{,}8\right\}$, $A\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\left\{\sqrt{7};-\sqrt{12};\sqrt{24}\right\}$, $A\cap\mathbb{R}=A$, $A\setminus\mathbb{Q}=\left\{\sqrt{7};-\sqrt{12};\sqrt{24}\right\}$, $A\setminus\mathbb{R}=\varnothing$. **11.a.** 2 și 3; **b.** 2 și 3; **c.** -5 și -4; **d.** 9 și 10; **e.** 6 și 7; **f.** 16 și 17; **g.** 27 și 28; **h.** -3 și -2. **12.a.** 3,1 și 3,24; **b.** $\sqrt{10}$ și $\sqrt{11}$. **13.a.** $A=\{3\}$; **b.** $B=\{5, 6, 7, ..., 15\}$; **c.** $C=\{1, 2, ..., 8\}$. **14.a.** $\sqrt{2}<1{,}5$; **b.** $-\sqrt{3}>-2$; **c.** $\frac{2}{3}>\sqrt{0{,}36}$; **d.** $-\sqrt{34}>-\sqrt{35}$. **15.a.** $-4<-3{,}89<-3<-2,(64)<-2{,}6<9$; **b.** $-\sqrt{11}<-\sqrt{10}<\sqrt{7}<\sqrt{8}<\sqrt{10}$; **c.** $1<\sqrt{2}<1{,}5<\sqrt{3}<2$. **16.a.** 0,5; **b.** $\frac{3}{2}$; **c.** $\sqrt{2}-1$; **d.** $\sqrt{5}-\sqrt{3}$; **e.** $-4+\sqrt{17}$; **f.** $\sqrt{8}+3$; **g.** $\sqrt{5}+\sqrt{6}$; **h.** $\sqrt{7}-2$. **17.a.** 5 numere raționale, 25 numere iraționale; **b.** 450. **18.a.** $\sqrt{x}=5$; **b.** $\sqrt{x}=15$; **c.** $\sqrt{x}=25$; **d.** $\sqrt{x}=7^{50}$. **19.a.** $\sqrt{55}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; **b.** $u(5^{10}+6^{10}+1)=2 \Rightarrow 5^{10}+6^{10}+1$ nu este pătrat perfect; **c.** $u(10^{10}+11^{10}+12^{12})=7 \Rightarrow 10^{10}+11^{10}+12^{12}$ nu este pătrat perfect. **20.a.** $x\in\left\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\right\}$; **b.** $x\in\varnothing$; **c.** $x=0$; **d.** $x\in\mathbb{R}^*$. **21.** Presupunem prin absurd că $\sqrt{x}\in\mathbb{Q}$. Rezultă că $x=(\sqrt{x})^2=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\in\mathbb{Q}$ (produs de numere raționale), fals. Așadar $\sqrt{x}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. **22.** $A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, $B=\{-4,4\}$ și $C=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$. $A\cap B=\varnothing$, $B\cap C=\{-4,4\}$, $A\cap C=A$. **23.a.** $x\in\{5,6\}$; **b.** $x\in\{1,2,3,5,6,8,9\}$; **c.** $x=5$; **d.** $x\in\{1,2,4,5,6,8,9\}$.

Minitest: **1.** $-\sqrt{3}<-1{,}5<0{,}5<\frac{3}{2}<\sqrt{5}$. **2.b.** **3.** $A\cap\mathbb{N}=\{0\}$, $A\cap\mathbb{Z}=\{-4;0\}$, $A\cap\mathbb{Q}=\left\{-4;-1,(25);\frac{1}{4};0;-11{,}6\right\}$, $A\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\left\{\sqrt{2};-\sqrt{7};\sqrt{10}\right\}$, $A\cap\mathbb{R}=A$, $A\setminus\mathbb{Q}=\left\{\sqrt{2};-\sqrt{7};\sqrt{10}\right\}$, $A\setminus\mathbb{R}=\varnothing$.

Lecția 3. Reguli de calcul cu radicali

1.a. $\sqrt{27}$; **b.** $\sqrt{30}$; **c.** $\sqrt{14}$; **d.** $\sqrt{165}$; **e.** $\sqrt{130}$; **f.** $\sqrt{105}$; **g.** $\sqrt{114}$; **h.** $\sqrt{66}$. **2.a.** $\sqrt{6}$; **b.** $\sqrt{11}$; **c.** $\sqrt{31}$; **d.** $\sqrt{56}$; **e.** $-\sqrt{70}$; **f.** $\sqrt{6}$; **g.** $-\sqrt{108}$; **h.** $\sqrt{3}$. **3.a.** $\sqrt{\frac{6}{5}}$; **b.** $\sqrt{\frac{5}{2}}$; **c.** $-\sqrt{\frac{3}{14}}$; **d.** $\sqrt{\frac{39}{10}}$; **e.** $\sqrt{\frac{2}{3}}$; **f.** $-\sqrt{\frac{11}{18}}$; **g.** $\sqrt{\frac{5}{3}}$; **h.** $\sqrt{\frac{3}{5}}$. **4.a.** 4; **b.** 5; **c.** 6; **d.** 8; **e.** 10; **f.** 1; **g.** 2; **h.** 4. **5.a.** $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$; **b.** $\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}$; **c.** $\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}$; **d.** $\sqrt{2}\cdot\sqrt{14}$; **e.** $\sqrt{2}\cdot\sqrt{23}$; **f.** $\sqrt{4}\cdot\sqrt{22}$; **g.** $\sqrt{2}\cdot\sqrt{82}$; **h.** $\sqrt{5}\cdot\sqrt{50}$. **6.a.** $\sqrt{\frac{5}{3}}$; **b.** $\sqrt{\frac{13}{2}}$; **c.** $\sqrt{\frac{7}{15}}$; **d.** $\sqrt{11}$; **e.** $\sqrt{5}$; **f.** $\sqrt{5}$; **g.** $\sqrt{\frac{1}{3}}$; **h.** $\sqrt{\frac{3}{14}}$. **7.a.** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$; **b.** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$; **c.** $\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{5}}$; **d.** $\frac{\sqrt{57}}{\sqrt{10}}$; **e.** $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}}$; **f.** $\frac{\sqrt{53}}{\sqrt{40}}$; **g.** $\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{9}}$; **h.** $\frac{\sqrt{217}}{\sqrt{90}}$. **8.a.** $2\sqrt{3}$; **b.** $2\sqrt{5}$; **c.** $2\sqrt{17}$; **d.** $2\sqrt{15}$; **e.** $2\sqrt{23}$; **f.** $2\sqrt{30}$; **g.** $10\sqrt{2}$; **h.** $6\sqrt{7}$. **9.a.** $3\sqrt{2}$; **b.** $5\sqrt{2}$; **c.** $2\sqrt{14}$; **d.** $3\sqrt{10}$; **e.** $2\sqrt{29}$; **f.** $3\sqrt{22}$; **g.** $6\sqrt{10}$; **h.** $11\sqrt{3}$. **10.a.** $\frac{4\sqrt{3}}{5}$; **b.** $\frac{\sqrt{17}}{6}$; **c.** $\frac{8\sqrt{3}}{13}$; **d.** $\frac{7\sqrt{5}}{16}$; **e.** $\frac{5\sqrt{2}}{3}$; **f.** $\frac{12\sqrt{6}}{11}$; **g.** $\frac{2\sqrt{187}}{17}=\frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{17}}$; **h.** $\frac{5\sqrt{35}}{21}$. **11.a.** $2\sqrt{5}\,|x|$; **b.** $3|x|\sqrt{5y}$, $y\geq 0$; **c.** $4|xy|\sqrt{2x}$, $x\geq 0$; **d.** $2x^2|y^3|\sqrt{17}$. **12.** a **H**; b **I**; c **B**; d **A**; e **C**; f **F**; g **E**; h **G**. **13.a.** $\sqrt{\frac{7}{9}}$; **b.** $\sqrt{\frac{16}{5}}$; **c.** $-\sqrt{\frac{18}{7}}$; **d.** $-\sqrt{80}$; **e.** $\sqrt{\frac{3}{20}}$; **f.** $-\sqrt{\frac{11}{27}}$; **g.** $\sqrt{\frac{361}{100}}$; **h.** $\sqrt{\frac{31}{100}}$. **14.a.** $\sqrt{2x^2}$; **b.** $\sqrt{5x^2}$; **c.** $\sqrt{10x^6}$; **d.** $\sqrt{6x^4}$; **e.** $\sqrt{7x^2y^2}$; **f.** $-\sqrt{7x^6y^4}$. **15.a.** $2\sqrt{5}>3\sqrt{2}$; **b.** $2\sqrt{7}>3\sqrt{3}$; **c.** $4\sqrt{2}<2\sqrt{10}$; **d.** $-3\sqrt{6}>-2\sqrt{14}$; **e.** $-2\sqrt{23}>-4\sqrt{6}$; **f.** $3\sqrt{7}<8$; **g.** $-4\sqrt{5}>-9$; **h.** $5\sqrt{5}-11>0$. **16.a.** $2\sqrt{2}<3\sqrt{2}<\sqrt{19}<2\sqrt{5}<\sqrt{21}<2\sqrt{6}$; **b.** $5<3\sqrt{3}<2\sqrt{7}<2\sqrt{10}<4\sqrt{3}<5\sqrt{2}$. **17.b.** $A(0{,}5)$, $B(-0{,}8)$, $C(\sqrt{5})$, $D(-\sqrt{2})$, $E(-\sqrt{3})$, $F(2\sqrt{3})$, $G(2\sqrt{2})$; **c.** (*D*, *G*), (*D*, *J*), (*E*, *F*), (*G*, *J*), (*I*, *H*).

Minitest: **1.a.** $5\sqrt{2}$; **b.** 5; **c.** $\sqrt{6}$; **d.** 7. **2.a.** 2. **3.a.** $3\sqrt{2}<2\sqrt{6}$; **b.** $-2\sqrt{7}<-3\sqrt{3}$; **c.** $3\sqrt{11}<10$; **d.** $4\sqrt{5}-9<0$.

Lecția 4. Adunarea și scăderea numerelor reale

1.a. $13\sqrt{2}$; **b.** $10\sqrt{7}$; **c.** $2\sqrt{5}$; **d.** $8\sqrt{6}$; **e.** $29\sqrt{3}$; **f.** $17\sqrt{7}$; **g.** $11\sqrt{6}$; **h.** $-6\sqrt{3}$. **2.a.** $8\sqrt{3}+9\sqrt{2}$; **b.** $7\sqrt{6}+16\sqrt{7}$; **c.** $5\sqrt{5}+2\sqrt{2}$; **d.** $12\sqrt{7}-8\sqrt{10}$; **e.** $-15\sqrt{2}$; **f.** $7\sqrt{6}-7\sqrt{3}$. **3.a.** $3\sqrt{5}$; **b.** $32\sqrt{6}$; **c.** $-2\sqrt{3}-\sqrt{2}$; **d.** $8\sqrt{3}-9\sqrt{6}$; **e.** $12\sqrt{5}+\sqrt{7}$; **f.** $9\sqrt{13}$. **4.a.** $a+b=8\sqrt{3}+3\sqrt{5}$, $a-b=\sqrt{5}$; **b.** $a+b=14\sqrt{2}-5\sqrt{10}$, $a-b=-2\sqrt{2}+13\sqrt{10}$; **c.** $a+b=\sqrt{7}+15\sqrt{6}$, $a-b=19\sqrt{7}-21\sqrt{6}$; **d.** $a+b=6\sqrt{3}+14\sqrt{5}$, $a-b=10\sqrt{3}-6\sqrt{11}$. **5.a.** $a+b+c=0$; **b.** $a+b+c=7$; **c.** $a+b+c=10$. **6.** $12\sqrt{6}$ cm. **7.** $12\sqrt{5}$ dm. **8.a.** $7\sqrt{3}$; **b.** $2\sqrt{5}$; **c.** $6\sqrt{3}$; **d.** $15\sqrt{2}$; **e.** $-3\sqrt{2}$; **f.** $6\sqrt{6}$. **9.a.** $10\sqrt{3}+9\sqrt{10}$; **b.** $11\sqrt{2}-5\sqrt{11}$; **c.** $5\sqrt{13}-\sqrt{15}$; **d.** $3\sqrt{3}-23\sqrt{5}$; **e.** $16\sqrt{5}-8\sqrt{2}$; **f.** $22\sqrt{7}-31\sqrt{6}$. **10.a.** $34\sqrt{2}$; **b.** $43\sqrt{3}$; **c.** $46\sqrt{5}$; **d.** $7\sqrt{6}$; **e.** $50\sqrt{7}$; **f.** $3\sqrt{10}$. **11.a.** 0; **b.** 0; **c.** $43\sqrt{5}$; **d.** $4\sqrt{2}+10\sqrt{3}$; **e.** $26\sqrt{2}$; **f.** $-20\sqrt{7}$. **12.a.** 0; **b.** $4\sqrt{x}$; **c.** $4\sqrt{x}-5\sqrt{y}$; **d.** $-4\sqrt{a}+2\sqrt{b}$;

e. $2\sqrt{2a}$; **f.** $10\sqrt{3a}$. **13.a.** $\frac{77\sqrt{2}}{45}$; **b.** $\frac{5\sqrt{6}}{7}$; **c.** $\frac{8\sqrt{5}}{9}$; **d.** $\frac{7\sqrt{7}}{8}$. **14.a.** $a<b$; **b.** $a>b$; **c.** $a>b$; **d.** $a<b$; **e.** $a<b$. **15.a.** $\sqrt{10}-\sqrt{7}$; **b.** $-\sqrt{14}+\sqrt{15}$; **c.** $2\sqrt{5}-3\sqrt{2}$; **d.** $-4\sqrt{2}+6$; **e.** $3\sqrt{3}+5$; **f.** $-2\sqrt{14}+3\sqrt{7}$; **g.** $2\sqrt{6}+3\sqrt{5}$; **h.** $-6\sqrt{2}+9$. **16.a.** 1; **b.** 4; **c.** 1; **d.** 0. **17.** Folosind teorema lui Pitagora, deducem că $SG+GC=\sqrt{72\,500}+200$ m $\simeq 469{,}25$ m și $SL+LC=\sqrt{10^5}+150$ m $\simeq 466{,}22$ m, deci traseul parcurs de Victor este mai scurt.

Minitest: 1.a. $11\sqrt{3}$; **b.** $7\sqrt{5}$; **c.** $12\sqrt{2}+2\sqrt{3}$. **2.b.** $11\sqrt{5}+14\sqrt{2}$. **3.a.** $15\sqrt{2}$; **b.** $9\sqrt{3}+2\sqrt{5}$; **c.** $7\sqrt{6}+4\sqrt{10}$; **d.** $6\sqrt{5}$.

Lecția 5. Înmulțirea și împărțirea numerelor reale

1.a. $8\sqrt{15}$; **b.** $45\sqrt{14}$; **c.** $-30\sqrt{30}$; **d.** $-55\sqrt{91}$; **e.** $60\sqrt{30}$; **f.** $-30\sqrt{42}$; **g.** $9\sqrt{105}$; **h.** $-80\sqrt{22}$. **2.a.** $36\sqrt{2}$; **b.** $-50\sqrt{3}$; **c.** $-120\sqrt{5}$; **d.** $-24\sqrt{15}$; **e.** 360; **f.** $96\sqrt{3}$; **g.** $-80\sqrt{30}$; **h.** -280. **3.a.** $\sqrt{6}$; **b.** $\sqrt{15}$; **c.** $-\sqrt{3}$; **d.** $-\sqrt{2}$; **e.** $-4\sqrt{3}$; **f.** $3\sqrt{15}$; **g.** $-3\sqrt{6}$; **h.** $6\sqrt{2}$. **4.a.** $\frac{3\sqrt{3}}{5}$; **b.** $-\frac{5\sqrt{15}}{12}$; **c.** $14\sqrt{5}$; **d.** $\frac{\sqrt{5}}{9}$; **e.** -25; **f.** $-\frac{8}{125}$; **g.** $-\frac{\sqrt{2}}{24}$; **h.** $35\sqrt{2}$. **5.a.** $a\cdot b=54$, $a:b=2$; **b.** $a\cdot b=175\sqrt{2}$, $a:b=\sqrt{2}$; **c.** $a\cdot b=90\sqrt{2}$, $a:b=2\sqrt{2}$; **d.** $a\cdot b=60\sqrt{5}$, $a:b=5\sqrt{5}$. **6.** 96 cm^2. **8.a.** $3\sqrt{5}-3\sqrt{2}$; **b.** $15\sqrt{2}+15-6\sqrt{5}$; **c.** $48\sqrt{2}+120\sqrt{3}-60$; **d.** $5-2\sqrt{5}+12\sqrt{2}$; **e.** $2-3\sqrt{5}$; **f.** 18. **9.a.** $\frac{57}{2}$; **b.** $\frac{64}{3}$. **10.a.** $2\sqrt{5}+3\sqrt{30}$; **b.** $60\sqrt{2}+60\sqrt{5}-15\sqrt{30}$; **c.** $6\sqrt{6}$; **d.** $3\sqrt{2}+4-\sqrt{7}$. **11.a.** $\frac{1}{4}$; **b.** $-\frac{1}{6}$; **c.** $\frac{5}{3}$; **d.** $-\frac{10}{3}$; **e.** $\frac{1}{\sqrt{7}}$; **f.** $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$; **g.** $-\sqrt{\frac{2}{5}}$. **12.a.** $x=2\sqrt{2}$; **b.** $x=12\sqrt{2}$; **c.** $x=8$; **d.** $x=5\sqrt{7}$. **13.a.** $x=2$; **b.** $x=\sqrt{3}$; **c.** $x=-36$; **d** $x=3$.

Autoevaluare: 1.a. $6\sqrt{14}$; **b.** $10\sqrt{15}$; **c.** $3\sqrt{3}$. **2.c.** 90 cm^2. **3.a.** $5\sqrt{2}+5\sqrt{3}$; **b.** $12\sqrt{3}+12\sqrt{5}-8\sqrt{6}$; **c.** $5\sqrt{10}+2\sqrt{3}-3\sqrt{5}$.

Lecția 6. Puterea cu exponent întreg a unui număr real. Ordinea efectuării operațiilor cu numere reale

1.a. 64; **b.** 121; **c.** 0,001; **d.** 9; **e.** 28; **f.** $\frac{1}{4}$; **g.** $\frac{1}{5}$; **h.** $-\frac{27}{125}$. **2.a.** $(1{,}3)^{11}$; **b.** $(\sqrt{7})^{15}$; **c.** $(-2\sqrt{3})^{11}$; **d.** $(-\sqrt{7})^{4}$; **e.** $(4\sqrt{5})^{5}$; **f.** $(3\sqrt{7})^{6}$; **g.** $(-0{,}5\sqrt{6})^{10}$; **h.** $(\sqrt{7})^{0}$. **3.a.** $\frac{9}{25}$; **b.** $\frac{9}{64}$; **c.** $\frac{1}{6}$; **d.** $6\sqrt{2}$; **e.** $\frac{1}{45}$; **f.** $\sqrt{11}$. **4.a.** 15^{10}; **b.** 6^{9}; **c.** $(\sqrt{30})^{15}$; **d.** 12^{20}; **e.** 3^{8}; **f.** 2^{72}; **g.** 4^{16}; **h.** $(-9)^{54}$. **5.a.** $\left(\frac{2}{5}\right)^2$; **b.** $(5^4)^2$; **c.** $(0{,}1)^2$; **d.** $(6^{-1})^2$; **e.** $(\sqrt{5})^2$; **f.** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$; **g.** $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$. **6.a.** 10; **b.** -8; **c.** 9; **d.** 4; **e.** -6; **f.** $-2\sqrt{6}$; **g.** 2; **h.** $\frac{1}{9}$. **7.a.** $4\sqrt{5}$; **b.** $-5\sqrt{5}$; **c.** $-\sqrt{3}$; **d.** 5. **8.a.** -504; **b.** 135; **c.** $120\sqrt{6}$; **d.** $360\sqrt{3}$. **9.a.** 186; **b.** 158; **c.** $-2\sqrt{6}$; **d.** $-21\sqrt{3}$. **10.a.** $\frac{1}{2}$; **b.** $\frac{9}{2}$. **11.** $a=-14$. **12.** $-29\sqrt{2}$. **14.a.** $x=11\sqrt{11}-\sqrt{1100}=11\sqrt{11}-10\sqrt{11}=\sqrt{11}\simeq 3{,}31$; **b.A.** $x\simeq 36{,}48-33{,}16=3{,}32$; **B.** $x\simeq 3{,}31^3-4{,}47\cdot 7{,}41\simeq 36{,}26-33{,}12=3{,}14$; **C.** $x\simeq 36{,}48-4{,}47\cdot 7{,}41\simeq 36{,}48-33{,}12=3{,}36$; **D.** $x\simeq 3{,}31^3-33{,}16\simeq 36{,}26-33{,}16=3{,}1$. **15.** **a-B**, **b-C**, **c-A**. **16.a.** -1; **b.** 6; **c.** 0.

Minitest: 1.a. 3; **b.** 3^{35}; **c.** 1. **2.c.** $-5-\sqrt{6}$. **3.a.** 0; **b.** $112\sqrt{5}$; **c.** 5.

Lecția 7. Raționalizarea numitorului unei fracții

1.a. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; **b.** $\frac{2\sqrt{7}}{7}$; **c.** $-\frac{6\sqrt{5}}{5}$; **d.** $-\frac{9\sqrt{11}}{11}$; **e.** $\frac{6\sqrt{5}}{25}$; **f.** $\frac{8\sqrt{7}}{21}$; **g.** $\frac{15\sqrt{2}}{14}$; **h.** $-\frac{9\sqrt{5}}{20}$. **2.a.** $\frac{7\sqrt{3}}{6}$; **b.** $\frac{-5\sqrt{2}}{6}$; **c.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$; **d.** $\frac{2\sqrt{7}}{3}$; **e.** $-\frac{\sqrt{2}}{6}$; **f.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$; **g.** $\frac{2\sqrt{5}}{15}$; **h.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **3.a.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$; **b.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; **c.** $\frac{\sqrt{42}}{7}$; **d.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$; **e.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **f.** $\sqrt{6}+\sqrt{2}$; **g.** $\frac{2\sqrt{10}-5\sqrt{2}}{20}$; **h.** $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{15}}{5}$. **4.a.** 0; **b.** 0; **c.** 1; **d.** 0. **5.a.** $4\sqrt{3}$; **b.** $\frac{11\sqrt{5}}{5}$; **c.** $4\sqrt{2}$; **d.** $\sqrt{6}$. **6.a.** $6\sqrt{7}-3\sqrt{5}$; **b.** $-\frac{41\sqrt{3}}{30}$; **c.** $\sqrt{5}+1$; **d.** $\frac{9+5\sqrt{6}}{3}$. **7.a.** $\frac{1}{2}$; **b.** $\frac{4\sqrt{3}}{9}$; **c.** $8\sqrt{6}+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+6$; **d.** $\sqrt{2}$. **8.a.** 5; **b.** $-\sqrt{6}$; **c.** $\frac{13\sqrt{7}}{6}$; **d.** $\frac{7\sqrt{2}}{60}$. **9.a.** -4; **b.** 3; **c.** 0; **d.** 9. **10.** 512. **11.** $a=\frac{75}{2}$. Valoarea minimă a lui b este $b=384$.

Minitest: 1.a. $4\sqrt{2}$; **b.** $\sqrt{2}$; **c.** $-\frac{\sqrt{15}}{10}$; **d.** $\frac{\sqrt{10}}{50}$. **2.c.** 1. **3.a.** $2\sqrt{2}+3\sqrt{3}$; **b.** 7; **c.** 1.

Lecția 8. Media aritmetică ponderată a două sau mai multe numere reale. Media geometrică a două numere reale pozitive

1.a. $m_a=6$, $m_g=4\sqrt{2}$; **b.** $m_a=\frac{3}{2}$, $m_g=\frac{\sqrt{14}}{3}$; **c.** $m_a=\frac{41}{40}$, $m_g=1$; **d.** $m_a=5$, $m_g=4{,}8$; **e.** $m_a=2{,}08$, $m_g=0{,}8$; **f.** $m_a=2\sqrt{5}$, $m_g=\sqrt{15}$; **g.** $m_a=4\sqrt{2}$, $m_g=\sqrt{30}$; **h.** $m_a=2\sqrt{3}$, $m_g=3$. **2.a.** 5,6; **b.** 6,9; **c.** 0,4; **d.** 1,35. **3.a.** $\frac{11\sqrt{3}}{3}$; **b.** $\frac{8\sqrt{2}}{3}$; **c.** $\frac{\sqrt{6}}{8}$; **d.** $\sqrt{7}$. **4.** $15\sqrt{2}$. **5.** $6\sqrt{3}$. **6.** $5\sqrt{3}$. **8.** $11\sqrt{3}$. **9.** 18. **10.** 4. **11.** $m_p=\frac{25\cdot 60+35\cdot 56+40\cdot 42+60\cdot 35}{25+35+40+60}=\frac{7\,240}{160}=45{,}25$ lei. **12.** 1 și 49 sau 7 și 7.

Minitest: 1. $m_a=12\sqrt{2}$, $m_g=2\sqrt{70}$. **2.a.** $\frac{4}{3}$. **3.** $4\sqrt{3}$.

Lecția 9. Ecuația de forma $x^2=a$, unde $a\in\mathbb{R}$

1.b, e. **2.a.** $x=6$; **b.** $x=10$; **c.** $x\in\varnothing$; **d.** $x=3$; **e.** $x=5$; **f.** $x\in\varnothing$. **3.a.** $x=-4$; **b.** $x=-5$; **c.** $x\in\varnothing$; **d.** $x=-7$; **e.** $x\in\varnothing$; **f.** $x\in\varnothing$. **4.a.** $x\in\{-9, 9\}$; **b.** $x\in\{-15, 15\}$; **c.** $x\in\{-1, 1\}$; **d.** $x=0$; **e** $x\in\{-\sqrt{10}, \sqrt{10}\}$; **f.** $x\in\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$. **5.** 14 m. **6.a.** $x\in\{-1{,}3; 1{,}3\}$; **b.** $x\in\{-0{,}8; 0{,}8\}$; **c.** $x\in\{-1{,}4; 1{,}4\}$; **d.** $x\in\varnothing$. **7.a.** $x\in\left\{-\frac{12}{7}; \frac{12}{7}\right\}$; **b.** $x\in\left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$; **c.** $x\in\{-5; 5\}$; **d.** $x\in\left\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$. **8.a.** $x\in\{-0{,}6; 0{,}6\}$; **b.** $x\in\{-4; 4\}$; **c.** $x\in\{-1; 1\}$; **d.** $x\in\left\{-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right\}$. **9.a.** $x\in\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$; **b.** $x\in\{-1; 1\}$; **c.** $x\in\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$; **d.** $x\in\{-1; 1\}$.

Autoevaluare: 1.a. $x\in\{-5, 5\}$; **b.** $x\in\{-4, 4\}$; **c.** $x\in\{-5\sqrt{3}, 5\sqrt{3}\}$. **2.b.** 3. **3.** 15 m.

Unitatea 2. Ecuații și sisteme de ecuații liniare

Lecția 1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități

1. $2a + 2b = 4$. **2.a.** $2a - 4b = 10$; **b.** $3a - 6b = 15$; **c.** $4a - 8b = 20$; **d.** $10a - 20b = 50$; **e.** $-2a + 4b = -10$; **f.** $-5a + 10b = -25$. **3.a.** 4; **b.** 12; **c.** 20; **d.** -4; **e.** -8; **f.** -36. **4.a.** *A*; **b.** *F*; **c.** *F*; **d.** *A*; **e.** *F*; **f.** *A*. **5.a.** *A*; **b.** *F*; **c.** *F*; **d.** *A*; **e.** *F*. **6.a.** 8; **b.** 16; **c.** 8; **d.** -2; **e.** -5. **9.** Adunând cele două egalități se obține $2x = 6$, de unde $x = 3$. **10.** Se înmulțește egalitatea cu 10. **11.** Se scad cele două egalități, iar egalitatea obținută se împarte la 2. **12.** Avem $\sqrt{(2n+3)^2} = |2n+3|$. Cum $n \in \mathbb{N}$, rezultă că $2n + 3 > 0$, deci $|2n + 3| = 2n + 3$. Așadar, membrul stâng se rescrie $\sqrt{(2n+3)^2} + \sqrt{4} = |2n+3| + 2 = 2n+3+2 = 2n+5$. În membrul drept obținem $2(n + 3) - 1 = 2n + 6 - 1 = 2n + 5$. Prin tranzitivitate, rezultă că $\sqrt{(2n+3)^2} + \sqrt{4} = 2(n+3) - 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Minitest: 1.a. *F*; **b.** *A*; **c.** *F*; **d.** *A*. **2. C.** 14. **3.a.** 21; **b.** -5; **c.** 4; **d.** -4.

Lecția 2. Ecuații de forma *ax* + *b* = 0, unde *a*, *b* ∈ ℝ. Mulțimea soluțiilor unei ecuații; ecuații echivalente

1. a, e. **4.a.** $2x + 1 = 0$; $2x = -5$; **b.** $4x - 3 = 0$; $\sqrt{2}x - 3 = 0$; **c.** $3x - 3 = 0$; $\sqrt{5}x - \sqrt{5} = 0$. **6.** a, b și d. **7.a** $S = \{3\}$; **b.** $S = \varnothing$; **c.** $S = \varnothing$; **d.** $S = \{0{,}4\}$; **e.** $S = \{3\}$; **f.** $S = \{2\sqrt{2}\}$. **8.a.** $S = \{2\}$; **b.** $S = \{2\}$; **c.** $S = \{7\}$; **d.** $S = \{11\}$; **e.** $S = \{-5\}$; **f.** $S = \{4\}$. **9.a.** Da, ambele ecuații au $S = \{1\}$; **b.** Prima ecuație are $S = \{-1\}$, iar a doua ecuație are $S = \{-2\}$, deci nu sunt echivalente. **10.a.** $S = \{15\}$; **b.** $S = \left\{\frac{18}{5}\right\}$; **c.** $S = \left\{\frac{19}{2}\right\}$; **d.** $S = \{5\}$; **e.** $S = \{4\}$. **11.a.** $S = \{2{,}8\}$; **b.** $S = \{0{,}48\}$; **c.** $S = \{-1\}$; **d.** $S = \{0{,}8\}$; **e.** $S = \{1{,}125\}$; **f.** $S = \{0\}$. **12.a.** $S = \{5\}$; **b.** $S = \{2\}$; **c.** $S = \{\sqrt{7}\}$; **d.** $S = \{\sqrt{3}\}$; **e.** $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$; **f.** $S = \{-4\sqrt{3}\}$. **13.a.** $S = \left\{-\frac{11}{2}\right\}$; **b.** $S = \left\{\frac{13}{2}\right\}$; **c.** $S = \{-6\}$; **d.** $S = \left\{-\frac{2}{5}\right\}$; **e.** $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$; **f.** $S = \left\{\frac{31}{3}\right\}$. **14.a.** $3x + 7 = -11$ sau $3x + 7 = 11$; $S = \left\{-6; \frac{4}{3}\right\} \cap \mathbb{Z} = \{-6\}$. **b.** Se impun condițiile $x \neq 2$ și $x \neq 0$, deci $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 2\}$; $S = \{-6\}$. **c.** $S = \left\{-3; -\frac{5}{2}; 4\right\} \cap \mathbb{Z} = \{-3; 4\}$.

Minitest: 1.a. $3x + 7 = 0$; **b.** $-2x - 0{,}5 = 0$; **c.** $-7x + 7 = 0$. **2.a.** -2. **3.a.** $S=\{-12\}$; **b.** $S = \left\{\frac{51}{7}\right\}$; **c.** $S=\{2\}$.

Lecția 3. Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute

1. a și d. **2.a.** Da; **b.** Nu; **c.** Da; **d.** Nu. **4.a.** (0,4), (2,3); **b.** (0,3), (2,5). **5.a.** $b = 2$; **b.** $a = 3$, $b = 1$. **7.a.** Da; **b.** Nu; **c.** Nu; **d.** Da. **8.a.** $S = \{(4{,}1)\}$; **b.** $S = \{(2, 2)\}$; **c.** $S = \{(4, 2)\}$; **d.** $S = \left\{6; \frac{1}{2}\right\}$. **9.a.** $S = \{(4{,}3)\}$; **b.** $S = \{(-9, -5)\}$; **c.** $S = \{(2, -2)\}$; **d.** $S = \{(-1{,}3)\}$. **10.a.** $S = \{(3{,}5)\}$; **b.** $S = \left\{\left(\frac{3}{2}, -\frac{15}{4}\right)\right\}$; **c.** $S = \{(2, -4)\}$; **d.** $S = \{(-2, 8)\}$. **11.a.** $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ -x + 2y = 8 \end{cases}$; **b.** $\begin{cases} x + \sqrt{3}y = 2 \\ 3x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$; **c.** $\begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = 2 \\ x + 2y = -2\sqrt{2} \end{cases}$; **d.** $\begin{cases} -x + 3y = -1 + \sqrt{3} \\ \sqrt{3}x - y = -3 + \sqrt{3} \end{cases}$. **12.a.** $S = \{(2t - 3, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$; **b.** $S = \varnothing$; **c.** $S = \left\{(\alpha, \sqrt{3}\alpha - 2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$; **d.** $S = \varnothing$. **13.** Avem situațiile $\begin{cases} |2k - 3n| = 0 \\ (-k + 2n)^2 = 1 \end{cases}$ și $\begin{cases} |2k - 3n| = 1 \\ (-k + 2n)^2 = 0 \end{cases}$. Obținem sistemele $\begin{cases} 2k - 3n = 0 \\ -k + 2n = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} 2k - 3n = 0 \\ -k + 2n = -1 \end{cases}$, $\begin{cases} 2k - 3n = 1 \\ -k + 2n = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 2k - 3n = -1 \\ -k + 2n = 0 \end{cases}$, cu soluțiile (3, 2), (−3, −2), (2, 1), (−2, −1). **14.a.** $S = \{(0; 3)\}$; **b.** $S = \{(\sqrt{3}; \sqrt{2})\}$; **c.** $S = \{(2\sqrt{7}; 4\sqrt{3})\}$; **d.** $S = \{(\sqrt{5}; -\sqrt{3})\}$.

Minitest: 1.a. nu; **b.** da. **2.C.** $S = \{(2, -2)\}$. **3.** $S = \{(-3, 1)\}$.

Lecția 4. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau al sistemelor de ecuații liniare

1. Fie a numărul alpiniștilor. Rezolvând ecuația $a + (a + 23) = 45$, obținem $a = 11$. **2.** Notând cu u cifra unităților, obținem ecuația $2u + u = 12$. Numărul este 84. **3.** Fie n numărul. Deîmpărțitul este $(n + 4) \cdot 5 - 5$. Din teorema împărțirii cu rest obținem $(n + 4) \cdot 5 - 5 = 4 \cdot 2533 + 3$; $n = 2024$. **4.** Fie $î \in \mathbb{N}^*$ numărul mai mic. Atunci numărul mai mare este $î + 392$. Obținem $î + 392 = î \cdot 12 + 7$, cu condiția $7 < î$. Numerele sunt 427 și 35. **5.** Fie $x \in \mathbb{N}^*$ vârsta Anei. Obținem $x + 15 = 4 \cdot (x - 6)$. Ana are acum 13 ani. **6.a.** Dacă în bloc ar fi 28 de apartamente a 3 camere fiecare, atunci ar fi și 22 de apartamente a două camere fiecare. Numărul total al camerelor din bloc ar fi egal cu $28 \cdot 3 + 22 \cdot 2 = 128$, ceea ce contrazice enunțul în care se afirmă că erau 118 camere. Deci nu este posibil. **b.** Notând cu $d, t \in \mathbb{N}^*$ numărul apartamentelor cu două, respectiv trei camere, obținem sistemul format din ecuațiile $d + t = 50$ și $2d + 3t = 118$, cu soluția $d = 32$, $t = 18$. **7.** 81 kg, respectiv 54 kg. **8.** 11 lei. **9.a.** Dacă în clasă ar fi 25 de elevi și s-ar așeza câte 3 în bancă, atunci ar rămâne un elev singur într-o bancă, ceea ce contrazice enunțul problemei. **b.** Notând cu $e, b \in \mathbb{N}^*$ numărul elevilor, respectiv numărul băncilor, obținem sistemul format din ecuațiile $e = 2(b - 3) + 1$ și $e = 3(b - 7)$, cu soluția $e = 27$, $b = 16$. **10.** 8 probleme. **11.** 24 de acțiuni cu 15 euro bucata, respectiv 16 acțiuni cu 12 euro bucata. **12.** 60 de tricouri. **13.a.** Dacă a doua zi ar fi parcurs 15 km, atunci a treia zi ar fi trebuit să parcurgă 10 km, ceea ce contrazice că a treia zi a parcurs 8 km. **b.** 32 km. **14.** Notăm cu d distanța de la vizuină la alun. Exprimat în secunde, timpul pentru a parcurge distanța de la vizuină la alun este $\frac{d}{6}$, iar pentru a parcurge distanța de la alun la vizuină este $\frac{d}{3}$. Obținem $\frac{d}{6} + \frac{d}{3} = 240$ și atunci $d = 480$ m. **15.** Trenul intră pe pod cu locomotiva și iese cu ultimul vagon. Notând cu x lungimea podului exprimată în metri, respectiv cu v viteza trenului exprimată în metri pe minut, obținem sistemul format din ecuațiile $x + 350 = v \cdot 7$ și $x + 350 = (v + 100) \cdot 6$. Lungimea podului este egală cu 3 850 m. **16.** 200 ml cu concentrația 6% și 400 ml cu concentrația 3%. **17.** Fie $c \in \mathbb{N}^*$ numărul consumatorilor care au participat la sondaj. Obținem ecuația $\frac{2c}{3} - \frac{1}{5} \cdot \frac{2c}{3} = \frac{c}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2c}{3} + 60$, cu soluția $c = 900$ de consumatori. **18.a.** Dacă $\overline{ac} = 25$, atunci, aplicând teorema împărțirii cu rest, am avea $\overline{2b5} = 25 \cdot 8 + 1 = 201$, ceea ce este imposibil. **b.** Cu condiția $a \neq 0$, obținem și rezolvăm ecuația: $\overline{abc} = \overline{ac} \cdot 8 + 1 \Leftrightarrow 100a + 10b + c = 80a + 8c + 1 \Leftrightarrow 20a + 10b = 7c + 1$. Deoarece ultima cifră a numărului $20a + 10b$ este zero, deducem că ultima cifră a numărului $7c + 1$ este zero și, ținând cont că c este cifră, obținem $c = 7$. Ecuația $20a + 10b = 7 \cdot 7 + 1 \Leftrightarrow 2a + b = 5$. Obținem $\overline{abc} \in \{137; 217\}$. **19.** Notăm cu $g, x \in \mathbb{N}^*$ numărul firelor de garoafe, respectiv lalele

dintr-un buchet. Obținem ecuația $3g + 7x = 56$ și, ținând cont că numerele $7x$ și 56 sunt divizibile cu 7, deducem că numărul $3g$ este divizibil cu 7. Cum 3 și 7 sunt numere prime între ele, rezultă că numărul g este divizibil cu 7 și, fiind număr prim, g este egal cu 7.
Autoevaluare: 1. Sunt 21 de fete și 7 băieți. **2.a.** Dacă un fir de trandafir ar costa 12 lei, atunci 7 fire ar costa 84 de lei, ceea ce ar depăși 83 de lei, prețul pentru 5 fire de lalele și 7 fire de trandafiri. Deci nu este posibil. **b.** Notăm cu $x, t \in \mathbb{Q}_+$ prețul unui fir de lalea, respectiv prețul unui fir de trandafir. Obținem sistemul format din ecuațiile $7x + 3t = 55$ și $5x + 7t = 83$. Un fir de lalea = 4 lei, trandafir= 9 lei. **3.** Notăm cu s suma de bani. În prima zi a cheltuit $25\% \cdot s$ și i-a rămas un rest $r = 75\% \cdot s$, pe care l-a cheltuit în următoarele trei zile. Rezolvăm ecuația $r = 35\% \cdot r + (35\% \cdot r - 8 \text{ lei}) + 62 \text{ lei} = r$. Deoarece $r = 180 \text{ lei} = 75\% \cdot s$, obținem $s = 240$ lei.

Unitatea 3. Elemente de organizare a datelor

Lecția 1. Produsul cartezian a două mulțimi nevide. Sistem de axe ortogonale în plan. Reprezentarea într-un sistem de axe ortogonale a unor perechi de numere reale. Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale. Distanța dintre două puncte în plan

1. $x = 3$, $y = -1$, $z = 1$. **2.a.** $A \times B = \{(1,0), (1,1), (3,0), (3,1)\}$, $B \times A = \{(0,1), (0,3), (1,1), (1,3)\}$, $A \times A = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,3)\}$, $B \times B = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$; **b.** $\text{card}(A \times B) = \text{card}(B \times A) = 4$, $\text{card}(A \times A) = 4$, $\text{card}(B \times B) = 4$.
3.a. $A\times B=\{(-2,2),(-2,\sqrt{5}),(-1,2),(-1,\sqrt{5}),(1,2),(1,\sqrt{5}),(6,2),(6,\sqrt{5})\}$, $B\times A=\{(2,-2),(2,-1),(2,1),(2,6),(\sqrt{5},-2),(\sqrt{5},-1),(\sqrt{5},1),(\sqrt{5},6)\}$, $B\times B=\{(2,2),(2,\sqrt{5}),(\sqrt{5},2),(\sqrt{5},\sqrt{5})\}$; **b.** $\text{card}(A \times B) = \text{card}(B \times A) = 8$, $\text{card}(A \times A) = 16$, $\text{card}(B \times B) = 4$.
4. D. 40 elemente. **7.** $A(2, 3)$, $B(3, -1)$, $C(-2, 0)$, $D(-3, -5)$, $E(0, -3)$, $F(-4, 4)$. **8.b.** $AB = 3$, $AC = 3\sqrt{2}$, $BC = 3\sqrt{5}$; **c.** Dacă M, N, P sunt mijloacele segmentelor AB, AC, respectiv BC, atunci $M\left(-\frac{1}{2},2\right)$, $N\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$, $P\left(1,\frac{1}{2}\right)$. **9.b.** $AB = AC = 5$, $BC = 6$, $\mathcal{P}_{ABC} = 16$; **c.** $\mathcal{A}_{ABC} = 12$; **d.** $M\left(\frac{3}{2},2\right)$, $N\left(-\frac{3}{2},2\right)$.
10.b. $AB = AC = 5$, $BC = 8$, $\mathcal{P}_{ABC} = 18$; **c.** $\mathcal{A}_{ABC} = 12$; **d.** $A'(4,8)$, $C'(1,12)$. **11.** $x \in \{-4, 4\}$. **12.a.** $M(3,1)$, $N(-1,1)$, $P(-2, -1)$; **b.** $A = \{-2, -1, 3\}$, $B = \{-1, 1\}$, $A \times B = \{(-2, -1), (-2,1), (-1, -1), (-1, 1), (3, -1), (3, 1)\}$. **13.** $A \times B = \{(1, -1), (1,3), (2, -1), (2,3)\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{-1, 3\}$.
Minitest: 1. $A \times B = \{(0, -1), (0, 0), (2, -1), (2, 0), (3, -1), (3, 0)\}$, $B \times A = \{(-1, 0), (-1, 2), (-1, 3), (0, 0), (0, 2), (0, 3)\}$, $A \times A = \{(0, 0), (0, 2), (0, 3), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 2), (3, 3)\}$, $B \times B = \{(-1, -1), (-1, 0), (0, -1), (0, 0)\}$. **2.c.** $A'(-5, -1)$.
3.b. $AB = 10$, $AC = 6$, $BC = 8$, $\mathcal{P}_{ABC} = 24$; **c.** $\mathcal{A}_{ABC} = 24$.

Lecția 2. Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice. Poligonul frecvențelor

1.a. 5; **b.** 7; **c.** 14. **2.a.** 9; **b.** 7; **c.** 12. **3.** 120. **4.a.** 20; **b.** 100. **5.** 8, 16, 20, 36, respectiv 60. **8.a.** 40; **b.** în semestrul I; **c.** venituri obținute în semestrul I: 170; venituri obținute în semestrul al II-lea: 160; $170 - 160 = 10$. Deci în semestrul al II-lea a obținut cu 10 milioane lei mai puțin decât în primul semestru. **9.a.** 56 000 euro; **b.** lunile februarie, martie și mai; **c.** în luna mai (scădere de 3000 de euro); **d.** lunile iulie, august și septembrie. **10. a** 2 luni; **b** 40 mil. lei; **c** 50 mil. lei. **12.** Dacă $x \in A$ și $y \in B$, atunci y = capitala lui x. **14.** $y = 3x$, pentru orice $x \in A$.
Autoevaluare: 1.a. 4; **b.** 9; **c.** 6,48. **2.a.** 10%; **b.** 30%; **c.** 18. **3.** $y = x + 2$, pentru orice $x \in A$.

Unitatea 4. Patrulaterul

Lecția 1. Patrulaterul convex. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex

1. $\sphericalangle B + \sphericalangle D = 360° - 190° = 170°$. **2.** $\sphericalangle D = 360° - 260° = 100°$. **3.** $\frac{\sphericalangle A}{3} = \frac{\sphericalangle B}{4} = \frac{\sphericalangle C}{5} = \frac{\sphericalangle D}{6} = \frac{360°}{18} = 20° \Rightarrow \sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 80°$, $\sphericalangle C = 100°$, $\sphericalangle D = 120°$. **4.** $\frac{\sphericalangle A}{3} = \frac{\sphericalangle B}{4} = \frac{\sphericalangle C}{2} = \frac{\sphericalangle D}{6} = \frac{360°}{15} = 24° \Rightarrow \sphericalangle A = 72°$, $\sphericalangle B = 96°$, $\sphericalangle C = 48°$, $\sphericalangle D = 144°$. **5.** $\sphericalangle A + \frac{\sphericalangle A}{2} + \frac{\sphericalangle A}{3} + \frac{\sphericalangle A}{4} = 360° \Rightarrow \sphericalangle A = 172°48'$, $\sphericalangle B = 86°24'$, $\sphericalangle C = 57°36'$, $\sphericalangle D = 43°12'$. **6.** 99°, 100°, 101°. **7.** 42 cm. **8.** Fie $M \in AB$, $B \in CN$. $\sphericalangle BMN = \sphericalangle AMD = 180° - (\sphericalangle A + \sphericalangle ADM) = 180° - (\sphericalangle C + \sphericalangle CDN) = \sphericalangle BNM$. **9.** $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 100°$, iar $\sphericalangle D = 60°$. **10.** $2B = A + C$, $2C = B + D \Rightarrow 2B + 2C = A + B + C + D = 360° \Rightarrow B + C = 180° \Rightarrow A + D = 180°$.
Minitest: 1.a. A; **b.** F; **c.** A; **d.** A. **2.** $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle C = 100°$, $\sphericalangle D = 140°$.
3. $AB + BD + DA = 25$, $BC + BD + CD = 27 \Rightarrow 32 + 2BD = 52 \Rightarrow BD = 10$ cm.

Lecția 2. Paralelogramul. Proprietăți

2.a. $ABCD$ paralelogram $\Rightarrow \sphericalangle B = \sphericalangle D = 50°$, $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 130°$. **c.** $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DCA = 20° \Rightarrow \sphericalangle A = \sphericalangle C = 70°$, $\sphericalangle D = \sphericalangle B = 110°$.
3. $\mathcal{P}_{DOC} = \frac{DB}{2} + \frac{AC}{2} + CD = 24$ cm. **4.** $MNPQ$ paralelogram $\Rightarrow MN = PQ \Rightarrow 3x + 2 = 5x - 2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow MN = 8$ cm, $PN = 9$ cm $\Rightarrow \mathcal{P}_{MNPQ} = 34$ cm.
5. $MNPQ$ paralelogram $\Rightarrow \sphericalangle M = \sphericalangle P \Rightarrow 2x + 3 = 3x - 27 \Rightarrow x = 30° \Rightarrow \sphericalangle M = \sphericalangle P = 63°$; $\sphericalangle Q = \sphericalangle N = 117°$. **6.** $x + 16 + 2x + 2 + \frac{3x}{2} - 11 + \frac{7x}{3} - 16 = 360 \Rightarrow x = 54°$, $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 70°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 110° \Rightarrow ABCD$ paralelogram. **7.** $ASCB$ paralelogram $\Rightarrow AS \parallel BC$; $ACBT$ paralelogram $\Rightarrow AT \parallel BC$, deci dreptele AS și AT, conform axiomei lui Euclid, coincid, adică punctele T, A, S sunt coliniare. **8.** $\sphericalangle DAP = \sphericalangle PAQ = \frac{\sphericalangle A}{2}$. Dar $\sphericalangle PCQ = \frac{\sphericalangle C}{2} = \frac{\sphericalangle A}{2}$, deci $\sphericalangle PCQ = \sphericalangle DPA$ (corespondente față de secanta CD), așadar $AP \parallel CQ$. Cum $AQ \parallel PC \Rightarrow APCQ$ paralelogram. **9.** Notăm $\sphericalangle DAP = \sphericalangle PAB = x$, $\sphericalangle ABP = \sphericalangle PBC = y$, $ABCD$ paralelogram $\Rightarrow 2x + 2y = 180° \Rightarrow x + y = 90° \Rightarrow \sphericalangle APB = 180° - (x + y) = 90°$. **10.** $AP = QC$, $AP \parallel QC \Rightarrow APCQ$ paralelogram. **11.** $ABCD$ paralelogram $\Rightarrow AD = BC = BD \Rightarrow \Delta DBC$ isoscel, cu BM mediană $\Rightarrow BM$ este înălțime. Deoarece BM și CP sunt înălțimi, $BM \cap CP = \{P\} \Rightarrow$ punctul P este ortocentrul triunghiului $BCP \Rightarrow DP$ înălțime $\Rightarrow DP \perp BC$, $BC \parallel AD \Rightarrow DP \perp AD$.
Minitest: 1. $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 40°$, $\sphericalangle D = \sphericalangle B = 140°$. **2.a.** F; **b.** A; **c.** A; **d.** F; **e.** F; **f.** A. **3.** $BE \parallel AC \Rightarrow \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle CBE$, $DC = DB$, $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle BDE \Rightarrow \Delta ADC \equiv \Delta EDB \Rightarrow AD = DE$. Deoarece $BD = DC$ și $AD = DE \Rightarrow ABEC$ paralelogram.

Lecția 3. Aplicații ale paralelogramului în geometria triunghiului. Linia mijlocie în triunghi, centrul de greutate al unui triunghi

1.a. $BC = 18$ cm; **b.** $MP = 8$ cm; **c.** $AC = 14$ cm. **2.a.** $\mathcal{P}_{MPQ} = 14$ cm; **b.** $\mathcal{P}_{ABC} = 34$ cm. **3.a.** $MG = 8$ cm, $GA = 4$ cm; **b.** $GB = 5$ cm, $PB = 15$ cm; **c.** $GQ = 6$ cm, $CQ = 9$ cm. **4.a.** Din cazul U.L.U. obținem că triunghiurile BEC și AEF sunt congruente, deci $CE = EF$ și cum $CO = OA$ obținem că OE este linie mijlocie în triunghiul CAF. **b.** Din congruența de la a. obținem și $AF = BC$, iar $BC = DA$. Avem $DO = OB$ și $DA = AF$, deci AO este linie mijlocie în triunghiul BDF. **c.** CE și BO sunt mediane în triunghiul ABC, deci T este centrul de greutate al triunghiului ABC. **5.** MP linie mijlocie în triunghiul $ABC \Rightarrow MP \parallel BC \Rightarrow MT \parallel BD$, $AM = MB \Rightarrow T$ mijlocul segmentului $AD \Rightarrow AT = TD$. **6.** ST linie mijlocie în triunghiul $AMP \Rightarrow$ $\Rightarrow MP = 12$ cm; MP linie mijlocie în triunghiul $ABC \Rightarrow BC = 24$ cm. **7.** $BC = 23\text{ cm} - 14\text{ cm} = 9$ cm, $MB = \frac{AB}{2} = 3$ cm, $PC = \frac{AC}{2} = 4$ cm, MP linie mijlocie în triunghiul $ABC \Rightarrow MP = \frac{BC}{2} = 4{,}5$ cm; $\mathcal{P}_{MPBC} = 20{,}5$ cm. **8.a.** $OS = SP$, $OT = TQ \Rightarrow ST$ linie mijlocie în triunghiul OPQ. **b.** $OS = SP$, $AS = SC \Rightarrow$ $\Rightarrow AOCP$ paralelogram $\Rightarrow AP \parallel OC$, $AP = OC$ (1), $OT = TQ$, $BT = TC \Rightarrow OBQC$ paralelogram $\Rightarrow QB \parallel OC$, $QB = OC$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow QB \parallel AP$, $QB = AP \Rightarrow ABQP$ paralelogram. **9.a.** G_1, O, G_3 coliniare, $G_1O = \frac{2}{3} \cdot OM = 6$ cm, $OG_3 = \frac{2}{3} \cdot OP = 6$ cm, $G_1G_3 = 12$ cm. **b.** Din **a** $G_1O = G_3O$, $G_2O = G_4O \Rightarrow$ $\Rightarrow G_1G_2G_3G_4$ paralelogram. **10.** În triunghiul ADC, AM, DO mediane și $AM \cap DO = \{T\} \Rightarrow T$ centru de greutate $\Rightarrow TO = \frac{1}{3} \cdot DO = \frac{1}{6} \cdot DB = 3$ cm, $OS = 3$ cm $\Rightarrow TS = 6$ cm. **11.** Q mijlocul AS, C mijlocul $AE \Rightarrow QC$ linie mijlocie în triunghiul $ASE \Rightarrow QC \parallel SE \Rightarrow QC \parallel ST$, T mijlocul $BC \Rightarrow S$ mijlocul $QB \Rightarrow AQ = QS = SB \Rightarrow SB = \frac{1}{3} \cdot AB = \frac{1}{3} \cdot CD$.

Minitest: 1. $TQ = \frac{AB}{2} = 5$ cm, $AC = 2ST = 14$ cm, $SQ = \frac{BC}{2} = 8$ cm. **2.** MP linie mijlocie în triunghiul $ABD \Rightarrow MP \parallel BD \Rightarrow MP \parallel BC$ (1), PQ linie mijlocie în triunghiul $ADC \Rightarrow PQ \parallel DC \Rightarrow PQ \parallel BC$ (2).Din (1) și (2) rezultă M, P, Q coliniare. **3.** $C'B'$ linie mijlocie în triunghiul $ABC \Rightarrow C'B' \parallel BC \Rightarrow$ $\Rightarrow C'B' \parallel BA'$, $C'B' = BA' \Rightarrow C'B'A'B$ paralelogram.

Lecția 4. Dreptunghiul. Proprietăți

1.a. A; **b.** A; **c.** F; **d.** A; **e.** A; **f.** A. **2.** $2 \cdot AC + 3 \cdot BD = 5 \cdot AC = 25$ cm. **3.** $OD = \frac{BD}{2} = \frac{AC}{2} = \frac{7}{2}$ cm. **4.** ΔMCB isoscel $\Rightarrow MC = BC = 6$ cm. $DM = DC - MC = 4$ cm. **5.** $\sphericalangle BOC = 60°$ și $BO = OC = 4$ cm $\Rightarrow \Delta BOC$ echilateral $\Rightarrow \mathcal{P}_{BOC} = 3 \cdot BO = 12$ cm. **6.** $AM \parallel NC$ și $AM \equiv NC \Rightarrow AMCN$ este paralelogram. **7.** B mijlocul $CE \Rightarrow AB$ mediană în ΔACE și $AB \perp CE \Rightarrow AB$ înălțime în $\Delta ACE \Rightarrow \Delta ACE$ isoscel cu $\sphericalangle ACE = 60°$. **8.** QP și MN linii mijlocii în ΔADC, respectiv $\Delta ABC \Rightarrow QP \parallel AC \parallel MN$ și $QP = MN = \frac{AC}{2} \Rightarrow MNPQ$ paralelogram. În ΔABC, MN este linie mijlocie, deci $MN \parallel AC$ și cum $MQ \parallel BD$, $AC \perp BD \Rightarrow$ $\Rightarrow MN \perp MQ \Rightarrow \sphericalangle NMQ = 90° \Rightarrow MNPQ$ dreptunghi. **9.** Fie dreptunghiul $ABCD$ și E, F picioarele perpendicularelor duse din vârfurile A, respectiv C pe diagonala BD. Atunci $AE \perp BD$, $CF \perp BD \Rightarrow AE \parallel CF$ (1). $\Delta AED \equiv \Delta CFB$ (I.U.) $\Rightarrow AE = CF$ și $DE = BF$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow AECF$ este paralelogram, cu $OE = OF = OD - DE$ (3). Analog se demonstrează că $BGDH$ este paralelogram, unde G, H sunt picioarele perpendicularelor duse din vârfurile B, respectiv D pe diagonala AC. Deoarece $OG = OH$ și $OE = OF$ (din (3)), rezultă că $GFHE$ este paralelogram. Triunghiurile ADE și DAH sunt congruente (I.U.), deci $DE = AH$. Folosind (3), obținem $GH = 2 \cdot OH = 2 \cdot (OA - AH) = 2 \cdot (OD - DE) = 2 \cdot OE = EF$, așadar $GFHE$ este dreptunghi. **10.** Fie dreptunghiul $ABCD$. Notăm cu M și P intersecțiile bisectoarelor unghiurilor A și C cu diagonala BD și cu N și Q intersecțiile bisectoarelor unghiurilor B și D cu diagonala AC. Ca în problema 9, se arată ușor că $AMCP$ și $BNDQ$ sunt paralelograme și apoi că segmentele MP și NQ se înjumătățesc și sunt congruente, deci $MNPQ$ este dreptunghi. **11.** Fie $DE \cap AC = \{P\}$; $BF \cap AC = \{T\}$. $E = \text{sim}_{AC}D \Rightarrow DP = PE$ și $F = \text{sim}_{AC}B \Rightarrow$ $\Rightarrow BT = TF$. $\Delta ADP \equiv \Delta CBT$ (I.U.) $\Rightarrow DP = TB$ (1). $DE \perp AC$ și $BF \perp AC \Rightarrow DE \parallel BF$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow DEBF$ este paralelogram. Cum $DE \perp AC$; $BF \perp AC$ și $DEBF$ este paralelogram $\Rightarrow DEBF$ dreptunghi. **12.** $\Delta MAD \equiv \Delta ABP$ (L.U.L.) $\Rightarrow MD \equiv AP$.

Minitest: 1. $\sphericalangle ADB = 50°$; $\sphericalangle DOC = 100°$; $\sphericalangle BAC = 40°$. **2.a.** $\sphericalangle MBT = 180° \Rightarrow M$, B, T coliniare. **b.** $\Delta MAD \equiv \Delta MBC$ (L.U.L.) $\Rightarrow MD = MC \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta MDC$ isoscel. **c.** $d(M, DC) = d(M, BA) + BC = 11$ cm și $d(T, AD) = 13$ cm. **3.** ΔADH dreptunghic cu $\sphericalangle AHD = 90°$; $\sphericalangle HAD = 30° \Rightarrow AD = 16\text{ cm} = BC$. ΔBDC dreptunghic cu $\sphericalangle BCD = 90°$; $\sphericalangle BDC = 30° \Rightarrow BD = 2 \cdot BC = 32$ cm.

Lecția 5. Rombul. Proprietăți

2.a. A; **b.** A; **c.** F; **d.** F; **e.** A; **f.** F. **3.** $\sphericalangle BAD = 80°$; $\sphericalangle ADC = 100°$; $\sphericalangle DBC = 50°$; $\sphericalangle DOC = 90°$; $\sphericalangle ACB = 40°$. **4.** $\sphericalangle ABD = \frac{\sphericalangle ABC}{2} = 60° \Rightarrow \Delta ABD$ echilateral $\Rightarrow BD = 9$ cm. **5.** Fie $OP \perp AB$; $P \in AB$; $DR \perp AB$; $R \in AB$. OP linie mijlocie în $\Delta BDR \Rightarrow DR = 2 \cdot PO = 14$ cm. **6.a.** Avem $EF \parallel AD$, $DE \parallel AF$ și $AD = AF$, deci $ADEF$ este romb. **b.** Analog $DBEF$ și $DECF$ sunt romburi. **7.a.** 64 cm; **b.** $d(D, AB) = 8\sqrt{3}$ cm. **8.a.** $OM \cap AD = \{P\}$; P mijlocul AD și $OP = PM$; $OM \perp AD \Rightarrow AODM$ romb. **b.** OP este linie mijlocie în ΔABD. Obținem $AB \parallel OM$ și $AB = OM$, deci $ABOM$ este paralelogram. **9.a.** $\mathcal{P}_{\text{dreptunghi}} = 2 \cdot 4 \cdot 6{,}25\text{ cm} = 50$ cm. **b.** $L + l = 25$ cm și $L = 4l \Rightarrow L = 20$ cm; $l = 5$ cm. **10.** $AN \parallel BM$; $NB \parallel AM \Rightarrow AMBN$ paralelogram și $AM = BM$ $\Rightarrow AMBN$ romb. **11.a.** $\Delta BDF \equiv \Delta BDE$ (L.U.L.) **b.** $BF = BE \Rightarrow \Delta BFE$ isoscel. Cum $\sphericalangle BCE = \sphericalangle FDE = 60° + \sphericalangle BCD$, rezultă $\Delta BCE \equiv \Delta FDE$ (L.U.L.), de unde $\sphericalangle BFE = \sphericalangle BED + \sphericalangle FED = \sphericalangle BED + \sphericalangle CEB = \sphericalangle CED = 60°$, deci ΔBFE este echilateral. **12.** Fie a și b lungimile a două laturi consecutive ale paralelogramului. $\frac{a + b + a}{3} = b \Rightarrow a = b$ și un paralelogram cu două laturi consecutive egale este romb. **13.** EH linie mijlocie în ΔADB și FG linie mijlocie în $\Delta BCD \Rightarrow EH \parallel BD \parallel FG$ și $EH = FG = \frac{BD}{2} \Rightarrow EFGH$ paralelogram. În ΔABD, EH este linie mijlocie, deci $EH \parallel BD$ și cum $EF \parallel AC \parallel HG$, $AC \perp BD \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle FEH = 90° \Rightarrow EFGH$ dreptunghi. **14.a.** Fie $CT \perp AB$, $T \in AB$. Triunghiul dreptunghic TAC are $\sphericalangle TAC = 30°$, deci $CT = \frac{AC}{2} = 6$ cm. **b.** Fie O centrul rombului, $AP \perp BC$; $P \in BC$; $\Delta APB \equiv \Delta AOB$ (I.U.) $\Rightarrow AP = AO = 6$ cm. **15.** Fie $BF \cap AE = \{O_1\}$ și $DB \cap AC = \{O\}$; BO_1 este mediatoarea AE și BO este mediatoarea $AC \Rightarrow B$ este centrul cercului circumscris ΔACE isoscel $\Rightarrow AB \perp CE$. **16.** Fie punctul S astfel încât punctul A se află pe segmentul SC. Folosind teorema unghiului exterior, obținem $\sphericalangle MSA = \frac{\sphericalangle MAC}{2} = \sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD$ și $\sphericalangle QSA = \frac{\sphericalangle QAC}{2} = \sphericalangle DAC = \sphericalangle ACB$. În concluzie, patrulaterul $SQCM$ este paralelogram și, dacă $MQ \cap SC = \{T\}$, în triunghiul isoscel AMQ avem AT mediană, deci AT mediatoare, adică $SQCM$ este romb. Obținem $MC = CQ$.

Minitest: **1.** $\sphericalangle ADB = 50°$; $\sphericalangle DOC = 90°$; $\sphericalangle BAC = 40°$. **2.** $ED \parallel AF$; $DF \parallel AE \Rightarrow AEDF$ paralelogram și AD bisectoarea $\sphericalangle EAF \Rightarrow AEDF$ romb. **3.** Fie $AP \perp BC$; $P \in BC$; ΔAPB dreptunghic cu $\sphericalangle APB = 90°$; $\sphericalangle ABP = 30° \Rightarrow AP = \frac{AB}{2} = 9$ cm.

Lecția 6. Pătratul. Proprietăți

1.a. A; **b.** A; **c.** A; **d.** F; **e.** A; **f.** A; **g.** A. **2.a.** $AB = 2 \cdot BC$, $AB = 2 \cdot AM = 2 \cdot MB \Rightarrow BC = AM = MB = AD$, $AMPD$ dreptunghi cu $DA = AM \Rightarrow AMPD$ pătrat, $MBCP$ dreptunghi cu $MB = BC \Rightarrow MBCP$ pătrat. **b.** triunghiul PCB dreptunghic isoscel $\Rightarrow \sphericalangle CBP = 45° \Rightarrow \sphericalangle PBA = 45°$. **c.** O_1O_2 linie mijlocie în triunghiul $APB \Rightarrow AB = 2 \cdot O_1O_2 = 18$ cm, $DA = 9$ cm $\Rightarrow \mathcal{P}_{ABCD} = 54$ cm. **3.** OP linie mijlocie în triunghiul $DAB \Rightarrow OP \parallel AM$ și $OP \equiv AM$, $\sphericalangle PAM = 90° \Rightarrow$ $\Rightarrow AMOP$ dreptunghi, $PA = AM = \frac{AB}{2} \Rightarrow AMOP$ pătrat. **4.** $OM = 4$ cm. **5.a.** $\Delta AO_2O_3 \equiv \Delta BO_1O_3 \equiv \Delta CO_2O_1$ (L.U.L.) $\Rightarrow O_1O_2 \equiv O_2O_3 \equiv O_3O_1 \Rightarrow \Delta O_1O_2O_3$ echilateral; $\sphericalangle AO_3O_2 = \frac{(180° - 150°)}{2} = 15°$, deci $\sphericalangle O_2O_3B = 90° - 15° = 75°$. Obținem $\sphericalangle O_2O_3B + O_3BC = 75° + 105° = 180°$, deci $O_2O_3 \parallel BC$. Analog rezultă $O_1O_3 \parallel AC$ și $O_1O_2 \parallel AB$. **b.** 30°. **6.a.** $\sphericalangle DAB = 180° - 135° = 45° \Rightarrow \sphericalangle PAD = 45° \Rightarrow AD$ bisectoarea $\sphericalangle PAB$ și AM bisectoarea $\sphericalangle PAD \Rightarrow$ $\Rightarrow A, D, M$ coliniare. **b.** Triunghiul PAD congruent cu triunghiul MBC, deci $DP = CM$. **c.** $\frac{1}{2}$. **7.** $\sphericalangle PCQ = \sphericalangle PCB + \sphericalangle BCD + \sphericalangle DCQ = 180° \Rightarrow P, C, Q$ coliniare. $SC = CB$, $DC = CM \Rightarrow DBMS$ paralelogram cu $SB = DM \Rightarrow DBMS$ dreptunghi cu $DS = DB \Rightarrow DBMS$ pătrat. **8.** $MBPD$ paralelogram $\Rightarrow$ $\Rightarrow DB \cap MP = \{O\}$, O mijlocul DB (1); $QDNB$ paralelogram $\Rightarrow DB \cap QN = \{O\}$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow DB$, QN, PM concurente. **9.** $PR \perp DB$, $DC \perp RB$, $DC \cap PR = \{P\} \Rightarrow P$ ortocentrul triunghiului $DBR \Rightarrow BQ \perp DR$. **10.** $\Delta TAC \equiv \Delta BAP$ (L.U.L.) $\Rightarrow TC \equiv BP$.

Minitest: **1.** 44 cm. **2.** Deoarece $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CBQ = 180°$, punctele A, B, Q sunt coliniare. Din $BM = AP$, $AP = CS$ și $CS = BQ$, rezultă că $BM = BQ$, deci ΔMBQ este dreptunghic isoscel. Obținem $\sphericalangle MQB = 45° = \sphericalangle BAC$, deci $\sphericalangle CAQ \equiv \sphericalangle AQM$, de unde rezultă că $MQ \parallel AC$. **3.** $L = 20$ cm, $l = 4$ cm $\Rightarrow \mathcal{P}_{ABCD} = 48$ cm.

Lecția 7. Trapezul: clasificare, proprietăți. Linia mijlocie în trapez

1. $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ADC = 90°$, $\sphericalangle BCD = 140°$. **2.** $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 30°$, $\sphericalangle D = \sphericalangle C = 180° - 30° = 150°$. **3.a.** 15 cm; **b.** 3 cm. **4.** Construim $CE \perp AD$, $CE = 8$ cm $\Rightarrow$ $\Rightarrow CD = 16$ cm. **5.** Fie $ABCD$ trapez cu $AB \parallel CD$, $\{O\} = AC \cap BD$, $AB = 15$ cm, $CD = 13$ cm. Construim $EF \perp AB$, astfel încât $E \in DC$, $F \in AB$ și $O \in EF$. Triunghiul DOC dreptunghic isoscel, OE înălțime $\Rightarrow OE$ mediană $\Rightarrow OE = \frac{DC}{2} = \frac{13}{2}$ cm. Triunghiul AOB dreptunghic isoscel, OF înălțime $\Rightarrow$ $\Rightarrow OF$ mediană $\Rightarrow OF = \frac{AB}{2} = \frac{15}{2}$ cm, $EF = \frac{13}{2} + \frac{15}{2} = 14$ cm. **6.** 16 cm. **7.** $\sphericalangle D = x \Rightarrow \sphericalangle A = 4x \Rightarrow 5x = 180° \Rightarrow x = 36° = \sphericalangle D = \sphericalangle C$, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 144°$. **8.** $AS = ST = TB = 6$ cm, $AD = BC$, $AS = TB \Rightarrow \Delta DAS \equiv \Delta CBT \Rightarrow DS = CT$. Deoarece $SD \nparallel CT$, rezultă că $DCTS$ trapez isoscel, cu lungimea liniei mijlocii de 12 cm. **9.** Construim $BE \perp DC$ și $AF \perp DC$, $DF = EC = 2$ cm, în triunghiul BEC dreptunghic $\sphericalangle EBC = 30° \Rightarrow BC = 2 \cdot EC = 4$ cm, $\mathcal{P}_{ABCD} = 24$ cm. **10.a.** $\sphericalangle C = \sphericalangle D = 45°$, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 135°$. **b.** Triunghiul BEC dreptunghic isoscel $\Rightarrow BE = EC = 2$ cm $\Rightarrow DE = 8$ cm, $DC = 10$ cm. **11.** $B + b = 20$ cm. Construim CE, $DF \perp AB$, ΔCEB dreptunghic, $\sphericalangle ECB = 30° \Rightarrow EB = AF = \frac{BC}{2} = \frac{b}{2} \Rightarrow 2b + b = 20 \Rightarrow b = \frac{20}{3}$ cm, $B = \frac{40}{3}$ cm, $\mathcal{P}_{ABCD} = \frac{100}{3}$ cm.

Minitest: **1.** $AD \cap BC = \{E\}$, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 45° \Rightarrow \sphericalangle AEB = 90° \Rightarrow AD \perp BC$. **2.** 12 cm. **3.** $\sphericalangle MBC \equiv \sphericalangle MCB \Rightarrow \Delta MCB$ isoscel $\Rightarrow CM = MB$ (1). $ABMD$ paralelogram $\Rightarrow AD = MB = CB$ (2). Din (1) și (2) rezultă că ΔBMC este echilateral $\Rightarrow \sphericalangle BCM = 60° \Rightarrow \sphericalangle ADC = 60°$, deci $\sphericalangle BAD = 120°$.

Lecția 8. Perimetre și arii

1.a. 56 cm²; **b.** 18 cm²; **c.** 36 cm²; **d.** 16 cm²; **e.** 32 cm²; **f.** 36 cm²; **g.** 80 cm²; **h.** 18 cm²; **i.** 112 cm². **2.** $\mathcal{A}_{AMC} = \frac{MC \cdot d(A; MC)}{2}$; $\mathcal{A}_{ABM} = \frac{MB \cdot d(A; MC)}{2} \Rightarrow \frac{\mathcal{A}_{AMC}}{\mathcal{A}_{ABM}} = \frac{MC \cdot d(A; MC)}{2} \cdot \frac{2}{MB \cdot d(A; MC)} = \frac{MC}{MB} = 3 \Rightarrow \mathcal{A}_{AMC} = 3\mathcal{A}_{\Delta ABM}$. **3.a.** $\mathcal{A}_{ABCD} = 96$ cm²; $\mathcal{P}_{ABCD} = 40$ cm; **b.** $\mathcal{A}_{ABC} = 48$ cm²; **c.** $\mathcal{A}_{AMD} = 24$ cm²; **d.** $\mathcal{A}_{DMC} = 48$ cm²; **e.** $\mathcal{A}_{DMP} = 12$ cm²; **f.** $\mathcal{A}_{DCBM} = 72$ cm². **4.** $\mathcal{A}_{ABC} = 18$ cm²; $\mathcal{A}_{ABD} = 18$ cm². **5.** $\mathcal{A}_{\Delta} = \frac{ip \cdot h}{2} = \frac{ip \cdot \frac{ip}{2}}{2} = \frac{ip^2}{4} = 25\text{ cm}^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow ip = 10$ cm. **6.** $\sphericalangle CBA = 45° \Rightarrow h = 4$ cm $\Rightarrow \mathcal{A}_{ABCD} = 32$ cm². **7.** $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AC \cdot d(B; AC)}{2} = 75\text{ cm}^2 \Rightarrow \mathcal{A}_{ABCD} = 150$ cm². **8.** Fie $DP \perp AB$; $P \in AB$; ΔADP dreptunghic cu $\sphericalangle DPA = 90°$; $\sphericalangle DAP = 30° \Rightarrow DP = \frac{AD}{2} = 6$ cm $\Rightarrow \mathcal{A}_{ABCD} = AB \cdot DP = 42$ cm². **9.** $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = 100$ cm². **10.** $\mathcal{A} = 484$ cm². **11.** $\mathcal{A} = \frac{d_1 \cdot 15}{2} = 135\text{ cm}^2 \Rightarrow d_1 = 18$ cm. **12.** $\mathcal{A}_{ABCD} = 4 \cdot \mathcal{A}_{AOB} = 44$ cm².

13. $\mathcal{A}_{A_1A_6B_6B_1} = A_1A_6 \cdot A_1B_1 = 20\text{ cm}^2$; $\mathcal{A}_{A_1A_4B_6} = \frac{A_1A_4 \cdot A_6B_6}{2} = 6\text{ cm}^2$, $\mathcal{A}_{A_2B_4B_5A_6} = \frac{(A_2A_6 + B_4B_5) \cdot A_5B_5}{2} = 10\text{ cm}^2$.

Autoevaluare: **1.** $\mathcal{A}_{ABC} = 6$ cm²; **2.a.** $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{(DC + AB) \cdot d(B; DC)}{2} = \frac{(12 + 6) \cdot 3}{2}\text{ cm}^2 = 27\text{ cm}^2$. **b.** $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{ADC} = 27\text{ cm}^2 - 18\text{ cm}^2 = 9\text{ cm}^2$. **3.a.** $\mathcal{P}_{ABCD} = 40$ cm. **b.** $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = 96$ cm². **c.** $\mathcal{A}_{ABCD} = l \cdot h = 96\text{ cm}^2 \Rightarrow h = 9{,}6$ cm.

Unitatea 5. Cercul

Lecția 1. Cercul. Coarde și arce în cerc. Proprietăți

2.a. $\frac{3}{7}$; **b.** $\frac{2}{7}$; **c.** $\frac{5}{7}$; **d.** $\frac{2}{7}$. **3.a.** $NO = OM$, $PO = OQ$, $\sphericalangle NOP \equiv \sphericalangle MOQ \Rightarrow \Delta NOP \equiv \Delta MOQ \Rightarrow NP = MQ$. **b.** $NP = OP = NO \Rightarrow \Delta NOP$ echilateral $\Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle NOP = 60° = \overset{\frown}{NP} \Rightarrow \sphericalangle NMP = 30°$. **4.** Triunghiul ABC echilateral $\sphericalangle BCA = 60° \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 120° = \sphericalangle BOA$. **5.** $\overset{\frown}{BC} = 20°$, $\overset{\frown}{AD} = 160°$. **6.** $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{DB} = 50° \Rightarrow$ $\Rightarrow AC \equiv DB$. $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CB} = 130° \Rightarrow AD \equiv CB$. **7.** Construim punctul T mijlocul segmentului OA. Mediatoarea segmentului OA intersectează cercul în punctele B și C. **9.** $AB = AC \Rightarrow A \in$ mediatoarei segmentului BC, M mijlocul segmentului $BC \Rightarrow AM$ este mediatoarea segmentului BC; $BO = OC \Rightarrow O \in$ mediatoarei segmentului $BC \Rightarrow O, A, M$ coliniare. **10.** $CO = OQ$ și $EO = OP \Rightarrow CEQP$ paralelogram și, cum $CQ = EP$, obținem $CEQP$ dreptunghi (1). $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EB}$ și AB diametru $\Rightarrow \sphericalangle COE = 90°$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow CEPQ$ pătrat. **11.** Semidreapta OD este bisectoarea

$\sphericalangle AOB \Rightarrow \sphericalangle AOD = 40° = \widehat{AD}$, $\sphericalangle POQ = \widehat{PQ} = 40° \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{PQ} = 40° \Rightarrow AD \equiv PQ$. **12.** $OP = OQ$ (1) ΔOPB este dreptunghic isoscel $\Rightarrow OP = BP = PA$ (2), ΔOQC este dreptunghic isoscel $\Rightarrow OQ = QC = QA$ (3). Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow OP = OQ = AQ = PA$, $\sphericalangle A = 90° \Rightarrow OPAQ$ pătrat $\Rightarrow \mathcal{A}_{APOQ} = 72\text{ cm}^2$.

Minitest: 1. 10 cm sau 2 cm. **3.** $CD \perp AB$, $CD \cap AB = \{M\}$, $\sphericalangle MOA = \widehat{AC} = 60°$, $\sphericalangle ACO = \dfrac{\widehat{AD}}{2} = 60° \Rightarrow \Delta ACO$ este echilateral $\Rightarrow AC = 10$ cm; $CM = 5$ cm.

Lecția 2. Unghi înscris în cerc

1.a. F; **b.** A; **c.** F; **d.** F. **2.a.** *AOB*; **b.** *OBA*, *OBC*; **c.** *BAO*, *BAC*; **d.** *DAB*, *BCD*. **3.a.** 14; **b.** 15; **c.** 19. **4.** $\sphericalangle ABD = 60°$, $\sphericalangle ABC = 90°$, $\sphericalangle BAC = 50°$, $\sphericalangle CDA = 90°$, $\sphericalangle CDB = 50°$, $\sphericalangle ACB = 40°$. $\sphericalangle CDA = 90°$, deci AC este diametru, iar A, O, C sunt coliniare. **5.** $\sphericalangle CPD = 90°$, $\sphericalangle PCD = 55°$, $\sphericalangle CPB = 45°$, $\sphericalangle DPB = 45°$, $\sphericalangle PBA = 10°$, $\sphericalangle APD = 45°$. **6.** $\sphericalangle A = 75°$, $\sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle C = 45°$. **7.a.** $\widehat{AB} = 45°$, $\widehat{AC} = 90°$, $\widehat{AD} = 135°$, $\widehat{AE} = 180°$; **b.** 45°; **c.** $\widehat{AD} = \widehat{DG} = \widehat{GB} = \widehat{BE} = \widehat{EH} = \widehat{HC} = \widehat{CF} = \widehat{FA} = 135°$, deci $AD = DG = GB = BE = EH = HC = CF = FA$. **8.a.** $BD \perp AC$, deci BD este mediatoarea coardei AC, așadar $AD = CD$. **b** BD este mediatoarea coardei AC, așadar $AB = CB$, deci $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACB = \widehat{AB} : 2 = \sphericalangle ADB$. **9.** Dacă $A \notin \widehat{BC}$, atunci $\widehat{AC} = 180°$, deci $\sphericalangle B = 90°$, $\sphericalangle A = 67°$, $\sphericalangle C = 23°$. Dacă $A \in \widehat{BC}$, atunci $\widehat{AC} = 88°$, deci $\sphericalangle B = 44°$, $\sphericalangle C = 23°$, $\sphericalangle A = 113°$. **10.a.** $\sphericalangle AOD = \sphericalangle DOC = \sphericalangle BOC = 180° : 3 = 60°$, deci ΔCOD este echilateral, iar $r = CD = 4$ cm. **b.** $\sphericalangle BAC = \widehat{BC} : 2 = 30°$. **c.** MN este diametru și $MD = MC$, deci $\sphericalangle CDM = \sphericalangle DCM$. Rezultă $\sphericalangle CDM + \sphericalangle DCN = \sphericalangle DCM + \sphericalangle DCN = \sphericalangle MCN = 90°$. **11.** $\widehat{BA'} = 2 \cdot \sphericalangle BAA'$, deci $\widehat{BA'} = 2 \cdot (90° - \sphericalangle B) = 84°$. Analog, $\widehat{CB'} = 60°$, $\widehat{AC'} = 36°$, $\widehat{A'B'} = 2 \cdot \widehat{CB'} = 120°$, $\widehat{B'C'} = 2 \cdot \widehat{AC'} = 72°$, $\widehat{C'A'} = 2 \cdot \widehat{BA'} = 168°$. **12.a.** $CD \parallel OA$ și $OA \perp BC$, deci $CD \perp BC$, așadar BD este diametru, iar B, O, D sunt coliniare. **b.** $ABOC$ este romb, cu $\sphericalangle BOC = 120°$, deci $\sphericalangle CAD = \widehat{CD} : 2 = \sphericalangle COD : 2 = 30°$. **c.** $OCDE$ este romb, cu $\sphericalangle COD = 60° = \sphericalangle DOE$, deci $\sphericalangle AOE = 180°$, așadar A, O, E sunt coliniare.

Minitest: 1. $\sphericalangle AOB = 120°$, $\sphericalangle ACB \in \{60°, 120°\}$. **2.** $\sphericalangle ABD = 50°$, $\sphericalangle BCD = 80°$, $\sphericalangle ADC = 80°$. **3.** $\widehat{AB} = 64°$, $\widehat{AD} = 116°$, deci $\widehat{BD} = 180°$.

Lecția 3. Tangente la cerc

3.a. 10 cm; **b.** 20 cm. **4.** $\mathcal{A}_{AOB} = 1\,152\text{ cm}^2$. **5.a.** $\Delta AOM \equiv \Delta BOM$ (C.C.), deci $OA = OB$. Cum $\dfrac{OC}{OA} = \dfrac{OD}{OB}$, din reciproca teoremei lui Thales în triunghiul AOB, rezultă că $CD \parallel AB$. **b.** $\Delta AOM \equiv \Delta BOM$, deci $\sphericalangle AOM = \sphericalangle BOM = 60°$. Cum $OC = OM = OD$, triunghiurile OCM și ODM sunt echilaterale și congruente, deci $ODMC$ este romb. **6.** $\widehat{MN} = 240°$, deci unghiul MON subîntinde arcul mic $\widehat{MN}$, iar $\sphericalangle MON = 360° - 240° = 120°$. **a.** Semidreapta OP este bisectoarea unghiului MON, deci $\sphericalangle POM = \sphericalangle MON : 2 = 60°$ și din triunghiul dreptunghic POM rezultă că $\sphericalangle MPO = 30°$ și $OP = 2 \cdot OM = 4$ cm. **b.** $\sphericalangle MPN = 2 \cdot \sphericalangle MPO = 60°$ și $PM = PN$, deci ΔMNP este echilateral. **7.a.** AB și BC sunt secante la cerc, iar AC este tangentă la cerc. **b.** Există două soluții. Dacă segmentele BC și OA nu se intersectează, atunci $OACB$ este dreptunghi și $BC = OA = 4$ cm. Dacă segmentele BC și OA se intersectează, atunci $OBAC$ este paralelogram cu centrul în Q, iar $BC = 2 \cdot BQ = 2 \cdot \sqrt{OB^2 + OA^2 : 4} = 2\sqrt{13}$ cm. **8.** C este mijlocul arcului $\widehat{AB}$, deci $OC \perp AB$. Fie d tangenta în C la cerc. Deoarece $OC \perp d$ și $OC \perp AB$, rezultă că $AB \parallel d$. **9.** Fie d tangenta în N la cerc. Avem $ON \perp d$ și $d \parallel MP$, deci $ON \perp MP$, așadar N este mijlocul arcului $\widehat{MP}$. Rezultă $\widehat{MN} = \widehat{MP} : 2 = 42°$. **10.a.** $OA = OB$ și $QA = QB$, deci OQ este mediatoarea segmentului AB, așadar $OQ \perp AB$. **b.** $\Delta OBQ \equiv \Delta OAQ$ (L.L.L.), deci $\sphericalangle OBQ = \sphericalangle OAQ = 90°$. **11.a.** $\Delta APM \equiv \Delta BPM$ (L.U.L.), deci $AM = BM$. Avem $PA = PB$ și $\sphericalangle APB = 60°$, deci ΔAPB este echilateral și $\sphericalangle PAB = 60° = \widehat{ASB} : 2$. Așadar $\sphericalangle AMB = \widehat{ASB} : 2 = 60°$ și, cum $AM = BM$, rezultă că ΔABM este echilateral. **b.** Din triunghiurile echilaterale AMB și APB, obținem $AM = AB = AP$, deci ΔMAP este isoscel. **c.** Semidreapta OP este bisectoarea unghiului AOB, deci $\sphericalangle AOS = \widehat{ASB} : 2 = 60°$ și, cum $OA = OS$, ΔOAS este echilateral, deci $AS = OA$. Analog rezultă că $BS = OB = OA$, deci $OASB$ este romb. **12.** $\widehat{EF} = 2 \cdot \sphericalangle EDF = 120°$, iar AF și AE sunt tangente la cerc, deci $\sphericalangle AFE = \sphericalangle AEF = \widehat{EF} : 2 = 60°$. Din ΔAEF obținem $\sphericalangle BAC = \sphericalangle EAF = 60°$. Procedând analog, deducem că $\sphericalangle ABC = 20°$, deci $\sphericalangle ACB = 100°$. **13.** AF și AE sunt tangente la cerc. Notăm $AE = AF = x$. Analog, $BD = BF = y$ și $CD = CE = z$. Cum $AB = AF + FB$, rezultă $c = x + y$. Analog, $a = y + z$ și $b = x + z$. Adunând cele trei egalități, obținem $2p = a + b + c = 2(x + y + z)$, deci $p = x + y + z = x + a = y + b = z + c$. Rezultă că $x = p - a$, $y = p - b$ și $z = p - c$. **14.a.** CD și AD sunt tangente la cerc, deci $DC = DA$. Analog rezultă $EB = EC$, deci $DE = DC + CE = AD + BE$. **b.** $\sphericalangle DOC = \sphericalangle FOC = 90° - \sphericalangle FCO = \sphericalangle DCF$ și $\sphericalangle EOC = \sphericalangle GOC = 90° - \sphericalangle GCO = \sphericalangle ECG$. Cum AB este diametru, rezultă $\sphericalangle ACB = 90°$, deci $\sphericalangle DCF + \sphericalangle ECG = \sphericalangle DCE - \sphericalangle ACB = 90°$, iar $\sphericalangle DOE = \sphericalangle DOC + \sphericalangle EOC = \sphericalangle DCF + \sphericalangle ECG = 90°$. **c.** Semidreapta DO este bisectoare în triunghiul isoscel ADC cu baza AC, deci $DO \parallel AC$, așadar $\sphericalangle CFO = 90°$. Cum $\sphericalangle FCG = \sphericalangle FOG = 90°$, patrulaterul $OFCG$ este dreptunghi. **15.** $O_1A_1 \perp A_1A_2$ și $O_2A_2 \perp A_1A_2$, deci $O_1A_1 \parallel O_2A_2$. Analog rezultă că $O_1B_1 \parallel O_2B_2$. Cum dreapta centrelor trece prin interiorul fiecărui unghi, $\sphericalangle A_1O_1B_1 \equiv \sphericalangle A_2O_2B_2$. Așadar $\widehat{A_2C_2B_2} = \sphericalangle A_2O_2B_2 = \sphericalangle A_1O_1B_1 = \widehat{A_1B_1}$ și $\widehat{A_1C_1B_1} + \widehat{A_2C_2B_2} = \widehat{A_1C_1B_1} + \widehat{A_1B_1} = 360°$.

Minitest: 1. 16 cm. **2.** 36°. **3.** $2\sqrt{2}$ cm.

Lecția 4. Poligoane regulate înscrise într-un cerc

2.a. 140°; **b.** 144°; **c.** 150°; **d.** 156°; **e.** 162°. **3.a.** 40°; **b.** 30°; **c.** 20°; **d.** 15°; **e.** 12°. **4.a.** 36; **b.** 18; **c.** 48; **d.** 40. **5.** Fiecare unghi are 20°. **6.** Fiind unghiuri exterioare ale poligonului, unghiurile PBC și PCB au măsurile egale cu $(180 - k)°$, unde $k°$ este măsura unui unghi al poligonului. Atunci $\sphericalangle BPC = 180° - (\sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB) = (2k - 180)°$. **a.** 36°; **b.** 90°; **c.** 108°. **7.a.** 36 cm; **b.** $\widehat{BCE} = \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DE} = 60° + 60° + 60° = 180°$, deci BE este diametru și, analog, CF este diametru. Diagonalele patrulaterului $BCEF$ sunt congruente și se înjumătățesc, deci $BCEF$ este dreptunghi. **c.** $\sphericalangle ACD = 90°$, $\sphericalangle ACE = 60°$, $\sphericalangle ACF = 30°$. **8.** Cum $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CA} = 120°$ și $\widehat{MP} = \widehat{PQ} = \widehat{QM} = 120°$, rezultă $\widehat{AP} = \widehat{MP} - \widehat{AM} = 60°$, $\widehat{BP} = \widehat{AB} - \widehat{AP} = 60°$ etc. Obținem $\widehat{MA} = \widehat{AP} = \widehat{PB} = \widehat{BQ} = \widehat{QC} = \widehat{CM} = 60°$, deci $MA = AP = PB = BQ = QC = CM$. Ca urmare, hexagonul $MAPBQC$ este înscris într-un cerc (din ipoteză) și are toate laturile congruente, deci este hexagon regulat. **9.** $\widehat{AN} = \widehat{MN} - \widehat{AM} = 90° - 45° = 45°$, $\widehat{BN} = \widehat{AB} - \widehat{AN} = 90° - 45° = 45°$ și se procedează ca la problema precedentă. **10.** Notăm $AB = 3a$, deci $MN = PQ = RS = a$. Cum $AR = AQ = a$ și $\sphericalangle RAQ = 60°$, triunghiul AQR este echilateral, deci $QR = a$, $\sphericalangle QRS = 180° - \sphericalangle ARQ = 120°$ și $\sphericalangle PQR = 180° - \sphericalangle AQR = 120°$. Analog, triunghiurile CNP și BMS sunt echilaterale; deducem că $NP = MS = a$ și $\sphericalangle QPN = \sphericalangle PNM = \sphericalangle NMS = \sphericalangle MSR = 120°$. Așadar, hexagonul $MNPQRS$ are toate laturile congruente și toate unghiurile congruente, deci este regulat. **11.** Fie MAB, NBC, PCD, QDE, REF și SFA triunghiurile echilaterale construite pe laturile hexagonului regulat $ABCDEF$. Cum $\sphericalangle SAF + \sphericalangle FAB + \sphericalangle BAM + \sphericalangle SAM = 360°$, rezultă că $\sphericalangle SAM = 120°$; analog, $\sphericalangle MBN = \sphericalangle NCP = \sphericalangle PDQ = \sphericalangle QER = \sphericalangle RFS = 120°$. Deducem că triunghiurile SAM, MBN, NCP, PDQ, QER și RFS sunt congruente (L.U.L.), deci $SM = MN = NP = PQ = QR = RS$ (1). Triunghiurile SAM și MBN sunt isoscele; obținem $\sphericalangle AMS = \sphericalangle BMN = 30°$, deci $\sphericalangle SMN = \sphericalangle AMS + \sphericalangle AMB + \sphericalangle BMN = 120°$. Asemănător se demonstrează că și celelalte cinci unghiuri ale hexagonului $MNPQRS$ au măsura de 120° (2). Din (1) și (2) rezultă că $MNPQRS$ este hexagon regulat.

Minitest: 1. Se construiesc mijloacele E, F, G, H ale arcelor $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, respectiv $\widehat{DA}$. $AEBFCGDH$ este octogon regulat. **2.** 9 cm.

Lecția 5. Lungimea cercului și aria discului

1.a. 24π cm; **b.** 7π cm; **c.** 17π cm. **2.a.** 7 cm; **b.** 36 cm; **c.** $\frac{11}{6}$ cm. **3.a.** $\frac{2\pi}{3}$ cm, $\frac{2\pi}{3}$ cm^2; **b.** $\frac{3\pi}{2}$ cm, $\frac{9\pi}{2}$ cm^2; **c.** $\frac{14\pi}{3}$ cm, $\frac{49\pi}{3}$ cm^2; **d.** $\frac{11\pi}{2}$ cm, $\frac{121\pi}{4}$ cm^2. **4.a.** 90°; **b.** 126°; **c.** 10°. **5.** 28π cm^2. **6.** 28 cm. **7.** 81π cm^2. **8.** Distanța d dintre doi pomi alăturați este o optime din lungimea cercului, deci $d = \frac{2\pi r}{8} = 1{,}25 \cdot \pi$ metri. Cum $3{,}14 < \pi < 3{,}15$, deducem că $d > 1{,}25 \cdot 3{,}14$ m $= 3{,}925$ m $> 3{,}9$ m, respectiv $d < 1{,}25 \cdot 3{,}15$ m $= 3{,}9375$ m < 4 m. **9.a.** 2; **b.** 4. **10.a.** $P_1 = 16\pi$ cm, $A_1 = 16\pi$ cm^2; **b.** $P_2 = 16\pi$ cm, $A_2 = 32\pi$ cm^2. **11.** $50(\pi - 2)$ cm^2. **12.** $8(4 - \pi)$ cm^2. **13.** $18(\pi - 2)$ cm^2. **14.** $L_{cerc} = 12\pi$ cm, $\mathcal{A}_{disc} = 36\pi$ cm^2, $L_{\overset{\frown}{ABC}} = 4\pi$ cm, $\mathcal{A}_{sector} = 12\pi$ cm^2. **15.** Cele trei tipuri de pizza au formă de disc cu raza de 12 cm, 16 cm, respectiv 20 cm. Varianta optimă de pizza este cea cu cel mai mic preț pe cm^2. Cum $\frac{40}{16^2\pi} < \frac{64}{20^2\pi} < \frac{28}{12^2\pi}$, Tudor ar trebui să cumpere pizza de dimensiune medie (32 cm diametru). **16.** Anvelopa are raza $R = 31{,}6$ cm $= 0{,}316$ m. Punctul A atinge solul prima dată după ce mașina a parcurs o distanță egală cu lungimea unui semicerc de rază R, iar pentru fiecare dintre următoarele atingeri, distanța parcursă crește cu lungimea unui cerc de rază R. Ca urmare, atunci când punctul A atinge a n-a oară solul, distanța parcursă de mașină este $d = (2n - 1)\pi R$ metri. Observăm că $\pi R < 3{,}15 \cdot 0{,}316 = 0{,}9954 < 1$. **a.** Dacă $n = 1000$, atunci $d = 1999\pi R$ m < 1999 m < 2000 m $=$ $= 2$ km, deci afirmația este falsă. **b.** Pentru $n = 50\,000$, distanța parcursă este $d = 99999\pi R < 100000 \cdot 3{,}15 \cdot 0{,}316 = 99540$ m < 100 km, deci pentru a parcurge 100 de km, punctul A trebuie să atingă solul de mai mult de 50 000 de ori.

Autoevaluare: 1. 8π cm, 16π cm^2, $\frac{20\pi}{3}$ cm. **2.** 6π cm^2. **3.** $225(4 - \pi)$ cm^2.

Unitatea 6. Asemănarea triunghiurilor

Lecția 1. Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante

1.a. 2; **b.** 0,5; **c.** 1; **d.** 3. **2.a.** 4; **b.** 0,25; **c.** 1,25; **d.** 1,(6). **3.a.** 1,5; **b.** 1,6; **c.** 1; **d.** 2,1. **4.a.** 2; **b.** 1; **c.** $\frac{1}{2}$; **d.** 2. **5.a.** 1; **b.** $\frac{1}{2}$; **c.** $\frac{1}{2}$; **d.** 2; **e.** 2. **6.a.** $\frac{1}{4}$; **b.** $\frac{3}{4}$; **c.** $\frac{1}{3}$; **d.** $\frac{4}{3}$; **e.** $\frac{5}{3}$. **7.** $AB = 6$ cm, $BC = 18$ cm. **8.** $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm, $BC = 18$ cm. **9.a.** $\frac{AB}{BC} = \frac{CD}{DE}$; **b.** Nu. **10.a.** $B_1B_2 = 5$ cm, $B_1B_4 = 15$ cm, $B_2B_4 = 10$ cm, $B_3B_6 = 15$ cm. **11.** Din teorema paralelelor echidistante rezultă că $BP = PQ = QC$, deci SQ este linie mijlocie în ΔCPR și $PR = 2SQ = 4$ cm. Cum MR este linie mijlocie în ΔANS, avem $NS = 2MR = 2$ cm. Obținem $MP = MR + RP = 5$ cm și $NQ = NS + SQ = 4$ cm. Deoarece MP și NQ sunt linii mijlocii în trapezele $ABQN$, respectiv $CDMP$, rezultă $AB = 2MP - NQ = 6$ cm și $CD = 2NQ - MP = 3$ cm. **12.a.** Din teorema paralelelor echidistante rezultă că $BQ = QR = RS = SC$, deci R este mijlocul segmentului SQ. **b.** MQ este linie mijlocie în trapezul $ABRN$, deci $AB + NR = 2MQ = 28$ cm, iar PS este linie mijlocie în trapezul $CDNR$, așadar $CD + NR = 2PS = 20$ cm. Obținem $AB - CD = 8$ cm și $EF = NF - NE = \frac{AB}{2} - \frac{CD}{2} = 4$ cm.

Minitest: 1.a. 3; **b.** 0,(3); **c.** 1,(3). **2.** $AB = 8$ cm, $BC = 10$ cm. **3.** 33 cm.

Lecția 2. Teorema lui Thales

1. $AC = 9$ cm, $DB = 8$ cm, $AB = 12$ cm. **2.a.** $DB = 4$ cm, $AE = 4$ cm, $EC = 8$ cm; **b.** $AB = 7$ cm, $EC = 8$ cm, $AC = 14$ cm; **c.** $AD = 3$ cm, $AE = 4$ cm, $EC = 8$ cm. **3.a.** $AB = 14$ cm, $FC = 5{,}(3)$ cm, $BC = 9{,}(3)$ cm; **b.** $BC = 20$ cm, $BE = 7{,}5$ cm, $AB = 12{,}5$ cm; **c.** $AE = 8$ cm, $FC = 4$ cm, $BC = 12$ cm. **4.** $AC = 12$ cm, $MC = 16$ cm. **5.** $NB = 5$ cm, $AC = \frac{50}{3}$ cm, $MC = \frac{25}{3}$ cm. **6.** $AE = 8$ cm, $EB = 4$ cm, $AF = 12$ cm, $FC = 6$ cm. **7.** $NC = 30$ cm, $AC = 50$ cm. **8.a.** Nu; **b.** Da; **c.** Da; **d.** Nu. **9.** $AF = 6$ cm, $FD = 18$ cm. **10.a.** $\frac{3}{7}$; **b.** $BP = 12$ cm, $PC = 16$ cm. **12.** $AO = 9$ cm, $OC = 15$ cm. **13.** Aplicând teorema lui Thales în triunghiul ADB se obține $\frac{AG}{AB} = \frac{AE}{AD}$. Apoi, în triunghiul DAB, tot conform teoremei lui Thales, rezultă că $\frac{DF}{BD} = \frac{DE}{AD}$. Adunând cele două relații se obține egalitatea cerută. **14.** 15 m. **15.** Se aplică reciproca teoremei lui Thales.

Minitest: 1. $AD = 7{,}5$ cm, $DB = 4{,}5$ cm, $AC = 16$ cm. **2.** $BO = 10$ cm, $DO = 15$ cm. **3.** Vezi problema 13.

Lecția 3. Triunghiuri asemenea. Teorema fundamentală a asemănării

1. $\sphericalangle C = \sphericalangle F = 85°$, $\sphericalangle E = 50°$, $\sphericalangle D = 45°$. **2.** $x = 6$, $y = 4$. **3.** $MN = 2$ cm, $NP = 3$ cm. **4.** $P_{ABC} = 28$ cm, $P_{MNP} = 84$ cm. **5.** $DE = 20$ cm, $\sphericalangle D = 64°$. **6.a.** $AD = 5$ cm, $AE = 7$ cm, $EC = 14$ cm, $DE = 6$ cm; **b.** $AD = 16$ cm, $DB = 4$ cm, $AE = 24$ cm, $EC = 6$ cm; **c.** $AD = 12$ cm, $DB = 4$ cm, $EC = 6$ cm, $DE = 15$ cm. **7.** $AD = 8$ cm, $DB = 12$ cm, $EC = 6$ cm, $AC = 10$ cm, $DE = 6$ cm. **8.** Echilateral. **9.** 81 cm. **10.a.** Dina: 125 m, Eliza: 500 m; **b.** 75 m.

Autoevaluare: 1. $DE = 40$ cm, $\sphericalangle E = 52°$. **2.** $EC = 3$ cm, $DB = 2$ cm, $AB = 8$ cm, $BC = 16$ cm. **3.** $AO = 14$ cm, $OC = 4$ cm, $BO = 21$ cm, $OD = 6$ cm.

Lecția 4. Criterii de asemănare a triunghiurilor. Aproximarea în practică a distanțelor folosind asemănarea

1.a. Da (U.U.); **b.** Nu; **c.** Da (L.U.L.); **d.** Da (L.L.L.). **2.a.** Da (U.U.); **b.** Nu; **c.** Da (L.U.L.); **d.** Da (L.L.L.). **3.a.** $MN = 12$ cm, $NP = 18$ cm; **b.** $\frac{1}{2}$. **c.** Calcul direct. **4.** $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DBC = 36°$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCB = 72°$. **5.** $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 64°$, $\sphericalangle C = \sphericalangle F = 58°$. **6.** Cazul U.U. **7.a.** $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ și $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$; **b.** $\mathcal{A}_{ABC} = 24$ dm^2, $\mathcal{A}_{DEF} = 216$ dm^2; **c.** $\frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{DEF}} = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$. **8.** $BO = 3 \cdot NO \Rightarrow BN = 2 \cdot NO \Rightarrow \frac{AM}{MO} = \frac{BN}{NO} \Rightarrow MN \parallel AB$. Dar $AB \parallel DC \Rightarrow MN \parallel DC \Rightarrow \Delta OMN \sim \Delta OCD$. **9.** $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CAD$ și $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ACD$. **10.** $OC = 4{,}5$ cm, $AO = 13{,}5$ cm, $CD = 8$ cm. **11.a.** $MP \parallel AB \Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{BM}{BC}$. Din $MN \parallel AC \Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BN}{AB}$. Din cele două relații rezultă egalitatea cerută. **b.** Din **a**, avem $\frac{AP}{AC} = \frac{BN}{AB} \Rightarrow \frac{AP}{AC} + \frac{AN}{AB} = \frac{BN}{AB} + \frac{AN}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$. **12.a.** Din $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$ rezultă că $DE \parallel BC$ (reciproca teoremei lui Thales). Rezultă, conform T.F.A., că $\Delta AED \sim \Delta ABC$; **b.** $DE \parallel BC \Rightarrow \sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ACB$ (corespondente). **13.a.** $\sphericalangle ABP \equiv \sphericalangle PCQ$ (alterne interne) și $\sphericalangle APB \equiv \sphericalangle CPQ$ (opuse la vârf); **b.** $\sphericalangle DCP \equiv \sphericalangle RBP$ (alterne interne) și $\sphericalangle DPC \equiv \sphericalangle RPB$ (opuse la vârf). **14.** $\Delta MBN \sim \Delta DCN$ (U.U.) $\Rightarrow \frac{MB}{DC} = \frac{BN}{NC} \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{1}{2}$. Se obține $BN = 6$ m și $NC = 12$ m. Rezultă că triunghiurile MBN și DCN sunt dreptunghice isoscele. Se obține $\sphericalangle MND = 90°$.

Unitatea 7. Relații metrice în triunghiul dreptunghic

Lecția 1. Proiecții ortogonale pe o dreaptă. Teorema înălțimii

3.a. *A*; **b.** *A*; **c.** *F*; **d.** *A*; **e.** *F*; **f.** *A*. **4.** $\frac{A'M'}{M'N'}=\frac{P'C}{P'N'}=\frac{A'N'}{CN'}=1$, $\frac{M'N'}{M'C}=\frac{1}{3}$, $\frac{A'C}{M'P'}=2$. **5.b.** 14 cm și 21 cm. **6.a.** 10 cm; **b.** 18 cm; **c.** 4 cm; **d.** 4,8 cm; **e.** 100 dm^2; **f.** $BD=7$ cm, $DC=28$ cm, $AD=14$ cm. **7.** Se folosește reciproca teoremei înălțimii. **8.** $12\sqrt{2}$ cm. **9.** 12 cm. **10.** 10 cm. **11.** $AM=9$ cm, $P_{ABCD}=52$ cm. **12.** Fie $AN\perp DC$, $N\in DC$. Cum *ABCD* este trapez isoscel, rezultă că $DN=MC=\frac{DC-AB}{2}=2$ cm. **b.** $BM=2\sqrt{3}$ cm. **13.** Folosind teorema înălțimii se obține $PC=9$ cm, de unde $DC=25$ cm.

Minitest: 2. 15 cm. **3.** $BD=4$ cm, $DC=16$ cm, $AD=8$ cm.

Lecția 2. Teorema catetei

1.a. $AB=15$; **b.** $EG=20$; **c.** $MP=60$; **d.** $XZ=16\sqrt{3}$. **2.a.** 8 cm; **b.** 2 cm și 6 cm; **c** $2\sqrt{3}$ cm; **d.** $4\sqrt{3}$ cm. **3.a.** 27 cm; **b.** 2 cm; **c.** $AB=30$ cm, $AC=30\sqrt{3}$ cm; **d.** $BC=24$ cm, $AC=AC=12\sqrt{3}$ cm; **e.** $BD=8$ cm, $DC=28$ cm, $AB=12\sqrt{2}$ cm, $AC=12\sqrt{7}$ cm. **4.** $12\sqrt{5}$ cm. **5.** $72\sqrt{5}+120$ mm. **6.** $\frac{1}{3}$. **7.** $16(\sqrt{2}+1)$ cm.

Minitest: 1. $BC=24$ cm, $AB=12\sqrt{3}$ cm. **2.a.** 3 cm și 9 cm; **b.** $AB=6$ cm, $AC=6\sqrt{3}$ cm. **3.** $20\sqrt{13}+52$ cm.

Lecția 3. Teorema lui Pitagora

1.a. 5; **b.** 10; **c.** 15. **2.a.** 12; **b.** 10; **c.** 7. **3.a.** $4\sqrt{10}$ cm; **b.** 12 cm; **c.** 20 cm. **4.a.** $6\sqrt{2}$ cm; **b.** $8\sqrt{2}$ cm; **c.** $15\sqrt{2}$ cm; **d.** $20\sqrt{2}$ cm. **5.a.** $4\sqrt{2}$ cm; **b.** $9\sqrt{2}$ cm; **c.** $12\sqrt{2}$ cm; **d.** $25\sqrt{2}$ cm. **6.a.** $\sqrt{3}$ cm; **b.** $5\sqrt{3}$ cm; **c.** $9\sqrt{3}$ cm; **d.** $16\sqrt{3}$ cm. **7.** 42 cm. **8.** $BD=40$ cm, $\mathcal{A}_{ABCD}=600\ cm^2$. **9.a.** 7 cm; **b.** 15 cm. **10.** $MP=NQ=4\sqrt{5}$ cm. **11.a.** 10 cm; **b.** 25 cm^2. **12.a.** 6 cm; **b.** $2\sqrt{13}$ cm. **13.** $BC=6$ cm, $AB=6\sqrt{3}$ cm. **14.a.** $AB=5$ cm, $\mathcal{A}_{ABC}=25\ cm^2$; **b.** $\mathcal{P}_{ABC}=5(2+\sqrt{2})$ cm. **15.** $AC=BD=8\sqrt{5}$ cm. **16.** $h=9$ cm, $\mathcal{A}_{ABC}=27\sqrt{3}\ cm^2$. **17.a.** Da, $\sphericalangle A=90°$. **b.** Nu. **c.** Da, $\sphericalangle B=90°$. **d.** Da, $\sphericalangle C=90°$. **e.** Nu. **18.** $\mathcal{P}_{ABCD}=24$ cm. **19.** $\mathcal{P}_{ABCD}=44$ cm. **20.** $AB=9$ cm. **21.** 4 cm. **22.a.** 9 cm; **b.** 108 cm^2.

Minitest: 1. 10 cm. **2.a.** dreptunghic, $\sphericalangle A=90°$; **b.** $2\sqrt{2}$ cm. **3.** 54 cm^2.

Lecția 4. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic

1.a. 5 cm; **b.** $\sin B=\frac{3}{5}$, $\cos B=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} B=\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} B=\frac{4}{3}$; **c.** $\sin C=\frac{4}{5}$, $\cos C=\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} C=\frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg} C=\frac{3}{4}$. **2.a.** $\sin B=\frac{4}{5}$, $\sin C=\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} B=\frac{4}{3}$, $\operatorname{tg} C=\frac{3}{4}$; **b.** $\sin C=\frac{4}{5}$, $\cos C=\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} B=\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} B=\frac{4}{3}$; **c.** $\cos B=\frac{3}{5}$, $\operatorname{ctg} B=\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} C=\frac{4}{3}$. **3.a.** $AC=4$ cm, $BC=8$ cm; **b.** $2\sqrt{3}$ cm. **4.a.** $AB=9$ cm, $AC=3\sqrt{7}$ cm; **b.** $\cos C=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\operatorname{tg} C=\frac{3\sqrt{7}}{7}$, $\operatorname{ctg} C=\frac{\sqrt{7}}{3}$. **5.a.** $AC=5$ cm, $BC=13$ cm; **b.** $\sin B=\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} B=\frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg} B=\frac{12}{5}$. **6.a.** 36 cm; **b.** $\sin C=\frac{4}{5}$, $\cos C=\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} C=\frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg} C=\frac{3}{4}$. **7.a.** 4 cm^2; **b.** $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ cm. **8.** $24(\sqrt{3}+1)$ cm. **9.a.** $AD=6$ cm, $\mathcal{A}_{ABC}=18\ cm^2$; **b.** $6(\sqrt{5}+1)$ cm; **c.** $\cos B=\frac{1}{\sqrt{5}}<\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$. **10.** $\mathcal{P}_{ABC}=24$ cm, $\mathcal{A}_{ABC}=24\ cm^2$. **11.a.** $AC=15$ cm, $AB=11{,}25$ cm, $BC=18{,}75$ cm; **b.** $\sin B+\cos B=1{,}4$. **12.a.** $AD=8\sqrt{3}$ cm, $BC=8$ cm; **b.** $\mathcal{P}_{ABCD}=16(\sqrt{3}+1)$ cm, $\mathcal{A}_{ABCD}=64\sqrt{3}\ cm^2$; **c.** $\sin(\sphericalangle BAC)=\frac{1}{2}$. **13.b.** $\mathcal{A}_{ABCD}=384\ cm^2$, $\mathcal{P}_{ABCD}=80$ cm; **c.** 19,2 cm. **14.a.** 48 cm^2; **c.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **15.a.** $14\sqrt{3}+6$ cm; **b.** $AC=2\sqrt{21}$ cm, $BD=12$ cm. **16.a.** $\mathcal{A}_{ABCD}=x(x+2)\ m^2$; **b.** $x=4$; **c.** $BE=BC:2$, deci unghiul *DBC* are 90 de grade, așadar țeava se întinde de la *D* la *B*. $d(D,BC)=BD=4\sqrt{2}$ m, apoi rezultă cerința problemei. **17.b.** $\mathcal{A}_{ABC}=\frac{225\sqrt{3}}{2}\ m^2$; **c.** $\frac{225\sqrt{3}}{4}\ m^2$.

Minitest: 1. $AC=20$ cm, $\sin B=\frac{4}{5}$, $\cos C=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} B=\frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg} B=\frac{3}{4}$. **2.a.** 24 cm; **b.** 4,8 cm. **3.a.** 120 cm; **b.** $AC=BD=24\sqrt{3}$ cm.

Lecția 5. Rezolvarea triunghiului dreptunghic. Calculul elementelor în poligoane regulate. Aproximarea în practică a distanțelor folosind relații metrice

1. $AB=2\sqrt{3}$ cm, $BC=4\sqrt{3}$ cm, $\sphericalangle C=30°$. **2.** $AB=4$ cm, $AC=4\sqrt{3}$ cm, $\sphericalangle B=60°$. **3.** $BC=12\sqrt{2}$ cm, $\sphericalangle B=\sphericalangle C=45°$. **4.a.** $AC=16$ cm, $\sin B=\frac{4}{5}$, $\sin C=\frac{3}{5}$; **b.** $BC=20$ cm, $\sin B=\frac{3}{5}$, $\sin C=\frac{4}{5}$; **c.** $AB=6$ cm, $\sphericalangle B=30°$, $\sphericalangle C=60°$; **d.** $AB=AC=4\sqrt{2}$ cm, $\sphericalangle C=45°$. **5.** $AB=20$ cm, $BC=25$ cm, $\sin B=\frac{3}{5}$, $\sin C=\frac{4}{5}$. **6.** $AB=2\sqrt{13}$ cm, $AC=3\sqrt{13}$ cm, $\sin B=\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\sin C=\frac{2\sqrt{13}}{13}$. **7.a.** $AB=8\sqrt{3}$ cm, $AC=8$ cm, $BC=16$ cm, $\sphericalangle C=60°$; **b.** $AB=4\sqrt{3}$ cm, $AC=12$ cm, $BC=8\sqrt{3}$, $\sphericalangle B=60°$. **8.a.** $2\sqrt{2}$ cm; **b.** $a_4=1$ cm, $R=\sqrt{2}$ cm. **9.a.** $2\sqrt{3}$ cm; **b.** $P_3=12$ cm, $A_3=4\sqrt{3}\ cm^2$; **c.** $a_3=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm, $R=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm. **10.a.** $24\sqrt{3}$ cm; **b.** $P_3=72\cdot\sqrt{3}$ cm, $A_3=432\sqrt{3}\ cm^2$; **c.** $h_3=36$ cm, $R=24$ cm. **11.** $R=6$ cm, $a_6=3\sqrt{3}$ cm. **13.a.** $a_3=\sqrt{3}$ cm, $R=2\sqrt{3}$ cm, $A_3=9\sqrt{3}\ cm^2$; **b.** $l_4=4{,}5$ cm, $a_4=2{,}25$ cm, $R=\frac{9\sqrt{2}}{4}$. **14.** $24\sqrt{3}\ cm^2$. **15.a.** $3\sqrt{3}\ cm^2$; **b.** $2\sqrt{3}$ cm; **c.** $\mathcal{A}_{disc}=4\pi\ cm^2>12{,}56\ cm^2$; $\mathcal{A}_{ABCDEF}=6\sqrt{3}\ cm^2<10{,}44\ cm^2$. **16.a.** 30 m; **b.** 864 m^2; **c.** $\frac{12}{5\sqrt{73}}$.

Autoevaluare: 1. $AB=6\sqrt{3}$ cm, $AC=6$ cm, $\sphericalangle C=60°$. **2.** $AB=4\sqrt{13}$ cm, $AC=6\sqrt{13}$ cm, $BC=26$ cm, $\sin B=\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\sin C=\frac{2\sqrt{13}}{13}$. **3.a.** $P_4=48\sqrt{2}$ cm, $A_4=288\ cm^2$; **b.** $A_3=108\sqrt{3}\ cm^2$.